Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN ECONOMÍA

PROVISIÓN PRIVADA DE BIENES PÚBLICOS. UNA ILUSTRACIÓN DEL MODELO DE BERGSTROM, BLUME Y VARIAN

Daniel Bretos Tabar

DIRECTOR

Javier Puértolas Sagardoy

Pamplona-Iruña

6 de junio de 2017

INDICE

One of the most useful approaches at the time of tackling a microeconomic model, in order to achieve its full comprehension in a rather simple and intuitive way, would be its expression by means of an example, as well as observing its functioning through a graphic display.

Throughout this project it is raised the realization of the model presented in the article "On the Private Provision of Public Goods" (Bergstrom, Blume and Varian), published in "Journal of Public Economics" in 1986. For that purpose, we assume individuals to have Cobb – Douglas preferences, and concepts such as efficient provision, private provision, reaction curve or Nash equilibrium are explained, following Varian's theoretical development in his manual "Microeconomic Analysis".

Given the high level of complexity in the needed calculations and graphic displays for the exemplification of such an article, the other goal established in this project is introducing the use of Wolfram Mathematica as a useful tool at the time of easing this process, taking advantage of its graphic and computing power. By using Mathematica, for instance, it is possible to generate interactive graphics through which some of the main results of the article are eventually illustrated.

KEYWORDS: Public good, private provision, reaction cure, Mathematica.

Una de las formas más útiles de abordar un modelo microeconómico para conseguir su comprensión de forma más sencilla e intuitiva es la concreción del mismo en un ejemplo, así como observar su funcionamiento a través de la representación gráfica del mismo.

A lo largo del trabajo se plantea la concreción del modelo presentado en el artículo "On the Private Provision of Public Goods" de Bergstrom, Blume y Varian; publicado en la revista "Journal of Public Economics" en 1986. Para ello se parte de unas preferencias de tipo Cobb-Douglas, y se introduce los conceptos de provisión eficiente, provisión privada, curvas de reacción y equilibrio de Nash, siguiendo el desarrollo teórico de Varian en su manual "Microeconomic Analysis".

Dada la complejidad de los cálculos y representaciones que precisa la ejemplificación de artículos académicos de este nivel, el otro objetivo del trabajo es introducir el uso de Wolfram Mathematica como una herramienta que facilite este proceso, haciendo uso de su potencia gráfica y de cálculo. A través de Mathematica, por ejemplo, es posible generar gráficos interactivos de los que se hace uso para ilustrar algunas de las conclusiones del artículo mencionado anteriormente.

PALABRAS CLAVE: Bien público, provisión privada, curvas de reacción, Mathematic

1. INTRODUCCIÓN

Mediante la construcción de un modelo algebraico tradicional y su implementación a través del uso de una herramienta informática, el trabajo consta en última instancia de dos objetivos: un objetivo instrumental y un objetivo microeconómico.

- INSTRUMENTAL: uso del software Wolfram Mathematica como herramienta para mostrar el funcionamiento de un modelo económico, haciendo uso de la potencia de cálculo del programa y de las capacidades gráficas e interactivas del mismo.
- MICROECONÓMICO: concreción de un modelo abstracto general en un ejemplo concreto que facilita su comprensión.

A pesar de que en este trabajo se intenta ilustrar un estudio muy concreto dentro de un campo mucho más amplio, como es la teoría de los bienes públicos, será preciso comenzar por introducir algunas ideas básicas.

Para comenzar, el propio título del documento incluye un concepto, el de "Bien público", cuya definición desde el punto de vista económico es menos evidente de lo que pudiera parecer. Habitualmente, y careciendo de ninguna validez económica, se suele entender y aceptar el concepto de bien público como aquél de interés público o cuya propiedad corresponde a entidades públicas. Sin embargo la definición de bien público enmarcada formalmente en la terminología económica difiere en gran medida del significado socialmente aceptado en contextos más generalistas. La definición de bien público parte del cumplimiento (o no cumplimiento) de ciertas propiedades en las cuales profundizaremos posteriormente, pero baste de momento definir un bien público como "*Un bien que está disponible a todos y cuyo uso por una persona no substrae del uso a otros.*"(Ostrom, 1978).

Una vez definido el concepto de bien público, introduciremos en primer lugar algunos de los estudios más notables de los últimos años, que han generado diversas premisas o suposiciones asumidas de forma general entre los economistas. Algunas de las principales aportaciones se deben a "pesos pesados" en el estudio de la teoría económica como Samuelson, Musgrave, Stiglitz, Olstrom o Lindahl. El desarrollo de este trabajo, sin embargo, sigue el desarrollo de Hal Varian en sus manuales "Intermediate Microeconomics: A Modern Approach" (1987) y "Microeconomic Analysis" (1992).

A continuación se profundiza el concepto de bien público, y de su provisión eficiente, principalmente a través del ya nombrado desarrollo teórico de Varian, pero también complementándolo con apuntes y matices de otros autores. Después ilustraremos un caso sencillo de equilibrio de manera que sirva como introducción al lenguaje de Wolfram Mathematica.

Posteriormente se aborda el caso que nos ocupa principalmente, "On the Private Provision of Public Goods", desarrollado por Thedore Bergstrom, Lawrence Blume y Hal Varian, en 1984-85 en la Universidad de Michigan, un artículo de enorme influencia posterior (sirva como referencia que tiene más de 800 citas en Google Scholar). De nuevo tras una breve descripción del desarrollo teórico del autor, concretaremos un caso, con un número determinado de individuos, cada uno de ellos con sus preferencias, generando un gráfico interactivo con el software Wolfram Mathematica. Terminaremos utilizando el gráfico para ilustrar algunas de las principales conclusiones del artículo.

1.1. Consideraciones previas

A lo largo de la historia reciente de la economía como campo de estudio, y siendo el liberalismo la ideología dominante durante la mayor parte de la misma, se ha aceptado el respeto a los derechos de propiedad y a la libre competencia, así como otros postulados capitalistas, como leyes universales sobre las que fundamentar cualquier tipo de mercado.

Bajo la mayoría de casos de creación y aplicación de política económica sobre el mercado de producción y distribución de bienes y servicios subyace la siguiente idea: *"Si existe en economía política una verdad bien fundamentada, es ésta: En todos los casos, sean cuales fueren los bienes que satisfacen las necesidades materiales e inmateriales del consumidor, lo que más le conviene a éste es que el trabajo y el comercio se desarrollen en libertad, porque esto tiene como consecuencia necesaria y permanente la máxima disminución del precio. Y ésta: Sea cual fuere el bien de que se trate, el interés del consumidor debe prevaleces siempre por sobre los intereses del productor."* (Moliniari, 1849).

Bajo estas premisas, no sería posible justificar ningún tipo de intervención estatal (o de cualquier otro tipo de planificador), ni siquiera de corte Keynesiano y ni mucho menos de acuerdo a postulados socialistas – marxistas o comunistas. Sin embargo, la teoría económica también avanzó en estas direcciones.

Independientemente de la ideología que profesasen, numerosos economistas han partido de la idea de que existen distintos tipos de bienes, y de que para algunos no es posible aplicar los postulados que hemos comentado anteriormente. De esta forma se generó un campo de estudio autónomo en el que estos bienes quedaron definidos como bienes públicos. Una de las definiciones comúnmente aceptada es "*Un bien que está disponible a todos y cuyo uso por una persona no substrae del uso a otros.*"(Elinor Ostrom, 1978)

Años antes autores como Musgrave y Samuelson habían establecido los fundamentos de lo que más tarde se convirtió en la teoría de los bienes públicos.

Concretamente, Paul Samuelson define los bienes públicos como "aquellos bienes que no es viable ni deseable racionar su uso y cuyo uso o consumo individual no impide el uso o consumo de otros" (Samuelson 1954). Esta definición ha sido base de muchos estudios. Por ejemplo, Stiglitz años más tarde elige la defensa nacional como el caso más claro de bien público puro*: La defensa nacional es uno de los pocos bienes públicos puros que satisface ambas condiciones: no es posible ni deseable impedir que se utilicen. […] si el gobierno crea una instalación militar que nos protege de los ataques, nos protege a todos. Los costes de la defensa nacional apenas son afectados cuando nace otro niño o una nueva persona emigra a otro lugar. Otro ejemplo son los faros. Por un lado es difícil (pero no imposible) impedir que disfruten de sus beneficios los barcos que no contribuyen a financiarlos […] Es importante distinguir entre el coste adicional de suministrar un bien del coste marginal que resulta del hecho de que una persona adicional disfrute de ese bien. Cuesta más instalar más faros pero no cuesta más permitir que un barco adicional se guíe por un determinado faro cuando navega cerca de él.* (Stiglitz, 1998).

Samuelson desarrolló una solución de equilibrio general, tanto matemática como gráfica para la provisión de bienes públicos y privados que incluía aspectos relativos a la asignación de recursos y a la distribución de la renta. La solución posteriormente denominada como "Condición de Samuelson" establece que "*la producción de un bien público debe llevarse hasta el punto en el que la suma de valoraciones marginales individuales, denominada valoración marginal social, se iguale al coste marginal de producción del bien público en términos del bien privado*" (Samuelson, 1954).

El modelo sufre de limitaciones tales como la dificultad de definir estrictamente un bien público, la necesidad de un planificador omnisciente (ya que la construcción de la función de bienestar social requiere de condiciones muy estrictas que no se dan en la realidad) o la existencia de un individualismo metodológico (individuos "maximizadores" en términos de utilidad) que es "*empíricamente falso"* (McFadden, 1999; p.75) y choca con la existencia de "free riders" o de actitudes como el altruismo. Otros estudios incluyen comportamientos basados en el compromiso (Amartya Sen) o en la existencia de preferencias colectivas más allá de la suma de preferencias individuales. Musgrave por ejemplo afirma que la sociedad "*apela a un sentido de comunidad que ata juntos a los individuos*" (Musgrave, 2002; p. 53).

Muchos años antes, el modelo que propuso Richard Musgrave en sus primeros estudios acerca de los bienes públicos, integraba las aportaciones sobre la provisión en equilibro parcial de Lindahl y Wicksell sobre bienes colectivos, y trató de recoger también parte de las aportaciones de la solución de equilibrio general que desarrolló Samuelson. Musgrave propuso la distinción de las tres funciones del Estado (asignación, redistribución, estabilización) por separado (Theory of public finance, 1959). Así, la asignación óptima de bienes públicos no incluye la redistribución (ni por tanto el concepto de equidad). También incluye el concepto de necesidades preferentes e indeseables, "necesidades que justifican buena parte de las intervenciones actuales del Estado, si bien a costa de renunciar a un elemento fundamental de la construcción neoclásica: la soberanía de la persona, al permitir el paternalismo del Estado, promocionando o impidiendo el consumo de determinados bienes" (Braña, Teoría de los Bienes Públicos y Aplicaciones Prácticas), mediante la provisión de bienes de mérito y demérito.

Hal Varian recoge muchas de las ideas de los autores que hemos mencionado (entre otros) y las desarrolla o las refuta para elaborar su propio desarrollo teórico. La poca evolución a nivel general de la teoría de los bienes públicos en los últimos años (excepto quizás…) hace que los manuales y artículos que publicó sigan siendo plenamente vigentes.

2. TEORÍA DE LOS BIENES PÚBLICOS.

En este apartado pasamos a concretar el campo en el que nos vamos a situar a lo largo de todo el trabajo, que corresponde a la concepción clásica de un bien público, que puede encontrarse en los manuales habituales de Microeconomía:

2.1. Bienes públicos. Concepto.

Como se ha mencionado en la introducción, un bien público es "*Un bien que está disponible a todos y cuyo uso por una persona no substrae del uso a otros.*"(Elinor Ostrom, 1978). La definición de bien público parte por tanto del cumplimiento (o no cumplimiento) de ciertas propiedades que introduciremos a continuación:

2.1.1.Rivalidad en el consumo

Definición: Propiedad que establece que cuando un individuo consume una unidad de un bien o servicio, ésta unidad deja de estar disponible para los demás consumidores potenciales. La "no rivalidad", por tanto, implica que aunque un individuo consuma una unidad de un bien o servicio, esa misma unidad sigue estando disponible para otros consumidores que quieran disponer de ella.

Consecuencias: Dar servicio a un consumidor adicional tiene coste nulo. Dicho de otra forma, el coste marginal del servicio es igual a cero, aunque el coste marginal de producción no lo sea. Es muy simple de entender con un ejemplo sencillo: aunque colocar una farola más tiene un coste monetario, el hecho de que una persona más se beneficie del alumbrado público no tiene un coste adicional.

Congestión

Se define como un caso de no rivalidad imperfecta en el que aparece cierta rivalidad a medida que el número de consumidores aumenta. Un ejemplo típico en los manuales, y que no por ello deja de ser ilustrativo, es el de una piscina. El coste de llenar una piscina es el mismo haya 10 bañistas o 50. Mientras la tasa de ocupación de la piscina sea baja, habrá espacio disponible para que los bañistas disfruten cómodamente del espacio, o lo que es lo mismo, para que consuman esa misma unidad del bien sin que la calidad se vea resentida. Incluso podrán entrar nuevos bañistas sin que esto cambie. Sin embargo, llegará un momento en el que haya demasiadas personas en la piscina, resintiéndose la calidad del servicio. Otro ejemplo podría ser una calle muy transitada. No es posible evitar que un conductor quiera dirigir su vehículo hacia la misma y que en última instancia no la utilice; sin embargo un gran número de conductores hará que haya menos espacio disponible para los demás, resintiéndose así la calidad del servicio, y generando un atasco que no deje circular a los demás.

2.1.2.Exclusión en el consumo

Definición: Propiedad que establece que es posible controlar el acceso al bien o servicio en cuestión mediante diversos mecanismos (precio, arbitrariedad, codificación, normativas…). La no exclusión implicará por tanto que cualquier consumidor puede hacer uso de unidades de un bien o servicio sin que nadie se lo impida.

2.1.3.Bienes públicos puros e impuros. Bienes privados y bienes comunales

La combinación de las dos propiedades que acabamos de introducir dará lugar a cuatro tipos distintos de bienes. Como se puede observar, la definición formal de bien público nace de esta combinación.

	RIVALIDAD	NO RIVALIDAD
EXCLUSIÓN	BIENES PRIVADOS	B. PÚBLICOS IMPUROS
NO EXCLUSIÓN	BIENES COMUNALES	*BIENES PÚLICOS PUROS*

Tabla 1 – Tipo de bienes. Rivalidad y exclusión.

En primer lugar daremos ejemplos de los tres tipos de bienes (Privados, Comunales y Públicos Impuros) que menos interés tienen para el desarrollo de éste documento, para a continuación profundizar en la definición de bien público puro:

Bienes privados

Bienes o servicios que cumplen la propiedad de rivalidad y exclusión. Al comprar un bolígrafo, por ejemplo, esta unidad no estará disponible para otros consumidores. Además es posible negarse a vender un bolígrafo a una persona, o simplemente su precio puede ser prohibitivo para algunos consumidores. Por tanto, es un bien privado.

Bienes comunales

Son aquellos bienes que no presentan excluibilidad en el consumo, y sin embargo sí son bienes rivales. Un caso típico es el del pasto en un terreno de propiedad municipal (de hecho, estos terrenos se conocen habitualmente como "comunales"). Si una vaca de uno de los agricultores de un pueblo se come una porción de pasto, las vacas de otro vecino no podrán comerse esa misma porción (no podrán utilizar esa misma unidad del bien) a pesar de que no se puede excluir del uso de ese terreno a ninguno de los agricultores.

Bienes públicos impuros

Son aquellos bienes en los que se cumple la no rivalidad, pero en los que sin embargo sí que es posible aplicar la exclusión. Un ejemplo claro es por ejemplo el de una señal de televisión de pago. La calidad del servicio no se ve repercutida si la empresa tiene otros clientes, sin importar su número; sin embargo hace falta realizar un pago para poder ver los canales en cuestión. La necesidad de un descodificador (o similar) hace posible la exclusión. El pago es la barrera al consumo de este bien. Otra forma de entenderlos es como bienes que pertenecen a una comunidad, como por ejemplo una piscina de una urbanización, o un terreno que es propiedad de todos los habitantes de un pueblo.

Bienes públicos puros

Después de realizar esta clasificación en función de rivalidad y posibilidad de exclusión, la definición de Elinor Ostrom mencionada en la introducción pasa a ser inmediata. Ahora entendemos que un bien público puro es aquel que cumple las propiedades de no rivalidad y que no consiente posibilidad de exclusión. Ésta es la definición principal de bienes públicos, y durante todo el desarrollo posterior subyacerá esta definición de los mismos. Por tanto, cuando hablemos de bienes públicos, estaremos hablando en realidad de bienes públicos puros.

2.2. Bienes públicos. Provisión.

La definición de bien público genera ciertos problemas a la hora de planificar su provisión. Más concretamente, las preguntas que surgen son dos. La primera cuestión es: "¿Cómo decidir la cantidad a producir dada la información que da el mercado? ¿Existen incentivos para que los consumidores revelen sus preferencias?" La otra cuestión que se presenta es: "¿Quién se hará cargo de la financiación del bien? ¿Existen incentivos para que los consumidores financien los bienes públicos por voluntad propia? ¿Será suficiente con las contribuciones de los consumidores o deberá intervenir el Estado?" Es importante puntualizar que la cuestión de la financiación está estrechamente ligada a la disposición de los consumidores a revelar sus preferencias (un alto gravamen puede incentivar a los consumidores a ocultar información para pagar menos). A grandes rasgos existen dos puntos a tener en cuenta a la hora de decidir la cantidad de bien público de cualquier tipo que debe ser provista a la sociedad:

- Los bienes públicos necesitan de factores de producción (recursos) por lo que los recursos disponibles condicionaran la cantidad provista.
- Los bienes públicos están destinados a satisfacer simultáneamente las necesidades y deseos de varios consumidores (en muchos casos de la sociedad en general).

El criterio de eficiencia buscará establecer qué parte de los recursos disponibles debe ser destinada a satisfacer esos deseos o necesidades, proporcionando la mayor satisfacción a la par que haciendo uso de la mínima cantidad de recursos que sea posible. Para ello se compara el coste de cada unidad del bien (es decir, de los factores de producción requeridos para producirlo) con la satisfacción que estos bienes proporcionan a los consumidores.

La diferencia entre este caso y el mercado de un bien privado cualquiera está en la forma en que los consumidores muestran su valoración de los bienes en sí mismos. En el caso de los bienes privado, los consumidores muestran su disposición a pagar por ellos mediante sus curvas de demanda. De esta forma demuestran sus preferencias y por tanto el grado de satisfacción que estos bienes les proporcionan. En el caso de los bienes públicos habría que averiguar cuánto vale cada unidad para el conjunto de los consumidores. Por tanto podemos afirmar que en gran medida el problema de la provisión de bienes públicos en cuanto a qué cantidad proveer, es un problema de información.

La segunda cuestión que se plantea es la de la financiación del bien. A pesar de que todos los individuos presentan una disposición a pagar (que podemos representar mediante la función inversa de demanda), en este caso el mercado no obliga a que ésta sea revelada. La provisión de los bienes públicos se realiza al conjunto de la sociedad, por lo que cualquier individuo puede aprovecharse de su consumo incluso aunque mienta y diga que no lo desea, y que por tanto no va a pagar por un determinado bien. Este comportamiento (no revelar la disposición a pagar por la posibilidad de consumir un bien a menor precio o gratis) se denomina comúnmente como comportamiento de "free-rider" o polizón.

En tal situación, ¿cómo financiar los bienes públicos? Existen varias respuestas. El Estado interviene en muchos casos financiando su coste con impuestos (alumbrado público…). En este caso el Estado actúa como planificador. También existen casos en los que los proveedores de bienes públicos ofrecen otros servicios que luego sirvan para financiarlo (por ejemplo la publicidad en la televisión) o directamente se intenta convertir el bien público en impuro (como la televisión de pago) para que el bien pueda ser financiado.

Sin embargo, así como la solución de planificador es imperfecta por un problema de información, las otras dos soluciones propuestas también generan problemas. La financiación de la televisión mediante publicidad llevará a decidir el nivel de producción en función de los deseos de los anunciantes y no de los consumidores. Por otra parte el codificador posibilita no dar acceso a individuos aun cuando el coste marginal del servicio es nulo, lo cual es socialmente ineficiente.

Hay finalmente, "casos de bienes públicos que desafiando la teoría del comportamiento racional, han decidido confiar en que los consumidores no actúen siempre como polizones" (*Puértolas y Llorente,* 2003*).* El caso del software libre es el más actual, en el que los consumidores obtienen el bien de forma gratuita bajo la petición de que paguen lo que consideren justo conforme a su satisfacción.

2.3. Noción de provisión eficiente de bienes públicos en equilibro parcial. Solución genérica. Planteamiento teórico y matemático.

Se ha afirmado anteriormente que valoración grupal de la satisfacción proporcionada por un bien público genera un problema de información, y la razón para ello es que no se puede preguntar a todos los individuos de una sociedad cuánto bienestar les proporciona un bien. Incluso puede que su respuesta como parte de un grupo difiera de su respuesta como individuos aislados.

Extrapolando la solución de un mercado de cualquier bien privado, si cada individuo pagara un precio que igualase la satisfacción que le proporciona la última unidad provista, se produciría una maximización de beneficios para el productor, a la par que los consumidores maximizarían su bienestar. Por tanto el problema teórico que se plantea es la construcción de una función que recoja la suma de la satisfacción de todos los individuos de la sociedad al recibir diferentes cantidades del bien público en cuestión.

Existen diversas opiniones y teorías acerca de cómo reflejar la suma de satisfacciones de individuos. Sin embargo, a partir de este momento aceptaremos la siguiente simplificación, que es mayoritaria en la teoría económica y que se corresponde con la intuición de la mayoría de los economistas: se aceptará como el valor que la sociedad otorga a un bien público como la suma (vertical) de las curvas inversas de demanda de este bien, tantas como individuos (consumidores) haya en el mercado. Como la curva inversa de demanda de un individuo expresa la cantidad que un consumidor está dispuesto a pagar por cada unidad de un bien, la suma de todas ellas expresará la cantidad que la sociedad en su conjunto está dispuesta a pagar por cada unidad del bien en cuestión. Si lo expresamos de forma matemática, el valor social marginal de q unidades de un bien público sería:

$$VsMg(q) \ = \ p1(q) + p2(q) + \cdots + pi(q)$$

A partir de este momento, la obtención de la cantidad eficiente es análoga a la del mercado de cualquier bien privado, en la que viene determinada por la intersección de la curva inversa de demanda y la de coste marginal (ya que es el punto en el que el beneficio social marginal de la última unidad es 0, y si se produjese más pasaría a ser negativo). En este caso, la cantidad eficiente de bien público vendrá determinada por la intersección de las curvas de coste marginal y de valoración social marginal, maximizando así el bienestar social.

Se plantea un caso sencillo en el que las funciones inversas de demanda de los consumidores son lineales. Por tanto, si se plantea un escenario con dos consumidores, sus funciones inversas de demanda serán:

- $p_1 = A - aq \qquad A, a > 0$
- $p_2 = B - bq \qquad B, b > 0$

Al ser la función de valoración social marginal *VsMg(q)* una suma vertical de funciones, no podemos limitarnos a sumar los parámetros de estas dos funciones. Se podría definir una función a trozos, en función del corte de las funciones con el eje horizontal, para así evitar que cualquiera de las funciones tome valores negativos. Sin embargo, para simplificar los cálculos, las definimos de la siguiente forma:

- $p_1(q) = \max\,[A - aq, 0]$
- $p_2(q) = \max\,[B - bq, 0]$

De esta forma si cualquiera de las dos expresiones fuese a tomar valores negativos al sustituir un valor de q, automáticamente el valor de la función será 0. Por tanto, para definir la función de valoración social marginal basta con sumarlas. También definimos la función de coste marginal, que puede ser constante o de tipo lineal (creciente):

- $VsMg(q) = p_1(q) + p_2(q)$
- $CMg(q) = d * q \qquad d > 0$
- $CMg(q) = C \qquad C > 0$

Bastaría con igualar las funciones de coste marginal y de valoración social marginal para obtener la cantidad de bien público a proveer dado que es la única incógnita por despejar. Al sustituir esa cantidad en la función de valoración social marginal hallaríamos el precio de equilibro parcial, y podríamos obtener tanto el excedente social como el de cada consumidor.

2.4. Provisión eficiente de bienes públicos. Un caso concreto. Solución gráfica.

2.4.1.Planteamiento del problema

Como un primer trabajo de aproximación, representamos gráficamente a través del uso de Wolfram Mathematica un caso concreto del equilibrio parcial que acabamos de plantear. Será por tanto un mercado con dos consumidores, eligiendo las siguientes funciones inversas de demanda y de coste marginal:

- $p_1 = 50 - \frac{1}{2}q$
- $p_2 = 80 - q$
- $CMg(q) = 60$

Siguiendo nuestro desarrollo teórico, para definir la función de $VsMg$ redefinimos las funciones inversas de demanda mediante máximos y las sumamos:

- $p_1(q) = max\,[50 - \frac{1}{2}q, 0]$
- $p_2(q) = max\,[80 - q, 0]$
- $VsMg(q) = p_1(q) + p_2(q)$

De cara a una solución matemática, como en este caso estamos buscando una solución estática, esto no tendría mucho sentido, ya que sabemos los valores que toma la función en todo momento (a partir de q=80 la función $p_1(q)$ toma valores negativos, y conocer este valor nos permite trabajar con intervalos). Sin embargo en Mathematica podemos hacerlo, ya que la solución gráfica es inmediata.

2.4.2.Introducción al lenguaje de Wolfram Mathematica. Solución estática.

Antes de proceder a mostrar el uso de Wolfram Mathematica como herramienta instrumental para el caso que nos ocupa, procederemos a introducir el programa, y su lenguaje a través de ciertos ejemplos básicos y fundamentales del mismo.

Mathematica es un paquete de software de matemáticas de uso fácil y gran capacidad que integra los elementos siguientes: Cálculo numérico, Cálculo simbólico, Grafismo en 2D/3D, Lenguaje de programación y Aplicaciones. La forma básica de expresión de cualquier comando o función que introduzcamos en Mathematica es en últimos términos una función de la forma f[a,b,…] ("*the basic underlying form of everything in the Wolfram Language",* reference.wolfram.com). Utilizaremos listas cuando queramos involucrar a más de un elemento en una función de forma simultánea. Las listas van siempre introducidas entre llaves de la siguiente forma {a,b,…}. Por otra parte, Mathematica permite realizar asociación de patrones o comportamientos (*"Pattern Matching"*, reference.wolfram.com). A nivel práctico, esto quiere decir que el programa permite definir variables (nosotros lo haremos con una barra baja detrás del nombre de la variable) y funciones sobre las mismas, de forma que quedan guardadas con un nombre determinado, y podemos trabajar con ellas sin necesidad de volver a introducirlas de forma completa (si bien en ciertos casos nos puede interesar utilizar las funciones al completo).

Así, podemos pasar a definir nuestras funciones inversas de demanda, de coste marginal, y de valoración social marginal. Para simplificar, utilizaremos las mismas que en el apartado 2.4.1.

Imagen 1 – Planteamiento de funciones en Mathematica

```
p1[q_] := Max[50 - 1/2 q, 0]
          máximo

p2[q_] := Max[80 - q, 0]
          máximo

Vmg[q_] := Max[p1[q] + p2[q], 0]
           máximo

Cmg[q_] := 60
```

Como hemos dicho antes, la solución gráfica es inmediata. Basta con hacer uso del comando *Plot* e introducir las funciones y el intervalo en el que se quieren representar. En general, para aumentar las posibilidades gráficas, también se trabaja con el comando *Show*, que permite superponer más de un gráfico mediante una lista en la que se introducen varias funciones *Plot* (con posibilidad de variar los rangos, etc). También hacemos uso de otras funciones por meras razones estéticas. A continuación, en la imagen 2 vemos el resultado:

```
In[12]:= Show[Plot[{Vmg[q], p1[q], p2[q], Cmg[q]}, {q, 0, 100}, PlotRange → {0, 150}],
         |mue···  |representación gráfica                        |rango de representación
          Plot[{Vmg[q], p1[q], p2[q], Cmg[q]}, {q, 0, 100}, PlotRange → {0, 150},
          |representación gráfica                        |rango de representación
           RegionFunction → Function[q, q ≤ 46.5], Filling → {1 → {4}}]]
           |función de región  |función               |relleno
```

Out[12]=

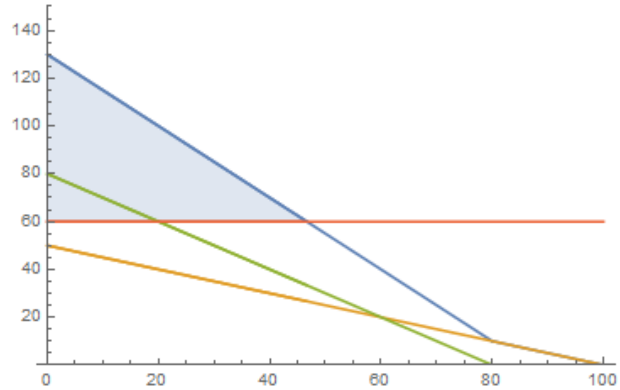


Imagen 2 – Equilibrio parcial. Representación en Mathemática

El área sombreada representa el excedente social dado el consumo de bien público.

2.5. PROVISIÓN EFICIENTE DE BIENES PÚBLICOS. SOLUCIÓN GRÁFICA INTERACTIVA.

El caso de la solución estática que acabamos de tratar es una mera introducción al manejo del Mathematica como herramienta para mostrar modelos económicos. En realidad el mayor interés del uso de Mathematica radica en que nos permite crear soluciones dinámicas para muchos problemas. Por ejemplo podemos construir una función con parámetros e ir viendo cómo varía la solución al cambiar los valores de estos parámetros. Esto es posible gracias al comando *Manipulate*, que genera unos deslizadores, que al moverse cambian los valores de los parámetros que hayamos indicado.

Al combinar el comando *Manipulate* con el ya mencionado *Plot*, generamos gráficos dinámicos de forma que podemos generalizar la solución anterior sin importar cuáles sean las funciones inversas de demanda (y por tanto las preferencias de los consumidores) ni el coste marginal. Como uno de los objetivos instrumentales del trabajo es la creación de un gráfico interactivo que se pueda ejecutar sin necesidad de activar previamente ningún tipo de comando o función, a partir de ahora volveremos a escribir las funciones de demanda inversa, de coste marginal y de valoración social marginal de forma completa dentro de las funciones de Mathematica.

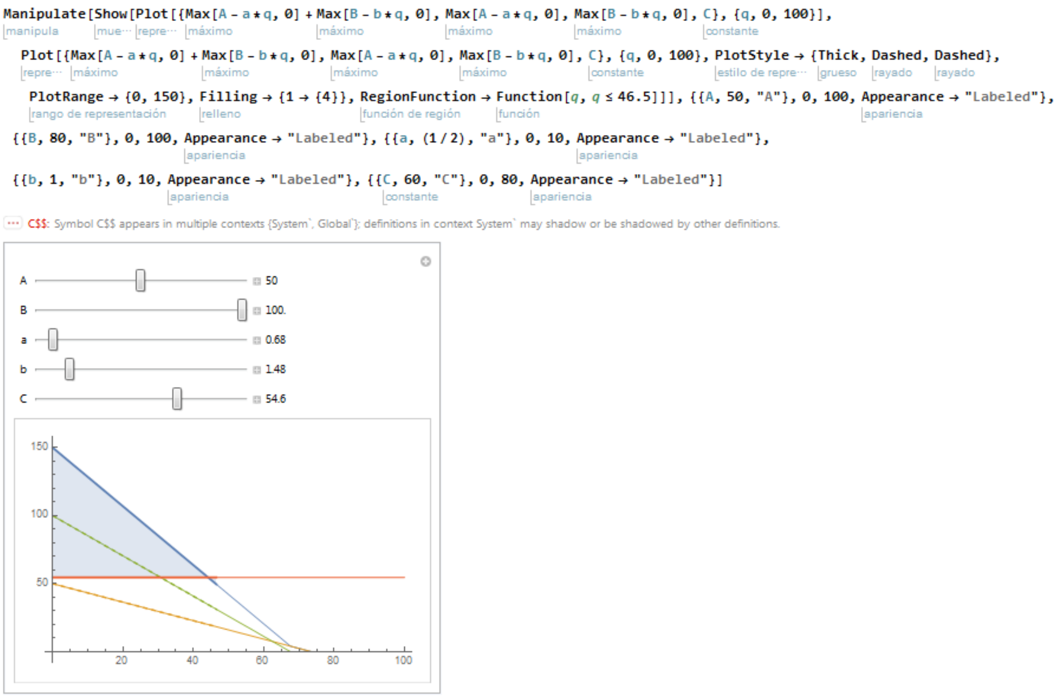


Imagen 3 – Ejecución de Plot y Manipulate para crear un gráfico dinámico (ver Anexo 1)

También hemos completado el gráfico con diversas opciones. Una de las más útiles es añadir un valor inicial a los parámetros para que al ejecutar la aplicación no aparezcan en 0 y por tanto no se vea el gráfico. Por otra parte mostramos con un sombreado el excedente social. Para ello superponemos dos gráficos (*Plots*) mediante el comando *Show*, definiendo un intervalo en el que se ve el sombreado, en función del punto de corte del Coste Marginal con la función de Valoración Social Marginal. (Imagen 3)

Además, por último, es posible generalizar esta función utilizando un coste marginal creciente, de forma que la solución que acabamos de mostrar es sólo un caso de la anterior. Para ello la función de coste marginal será (como ya hemos dicho en el apartado 2.4.1) del tipo $CMg(q) = dq$. Vemos la solución en los siguientes gráficos (Imagen 4). En el anexo 1 podemos observar como desplazando los deslizadores obtenemos tantas soluciones como queramos variando los valores de los parámetros.

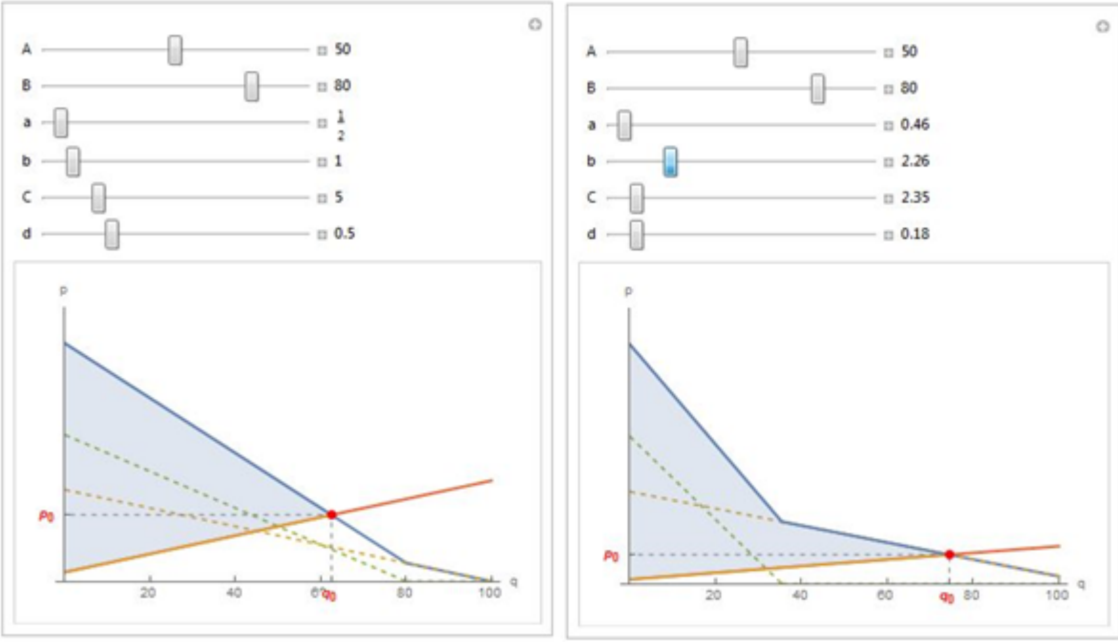


Imagen 4 – Modelo de equilibrio parcial con coste marginal creciente.

Por la complejidad y extensión de las funciones que se generan al introducir tantas opciones, a partir de ahora no siempre se mostrarán imágenes completas de los comandos que han sido utilizados para generar los gráficos, pero para todos los procesos se remite al lector a comprobar los ANEXOS 1 al 5.

3. SOBRE LA PROVISIÓN PRIVADA DE BIENES PÚBLICOS (*ON THE PRIVATE PROVISION OF PUBLIC GOODS*). UNA ILUSTRACIÓN DEL CASO DE BERGSTROM, BLUME Y VARIAN EN UN MERCADO DE DOS CONSUMIDORES

3.1. Introducción

"En la edición de febrero de 1986 de Journal of Public Economics se publicó un artículo que cambiaría la agenda de investigación de los años venideros" (Editorial, número especial de Journal of Public Economics 91, 1643–1644, 2007). Éste artículo, conocido comúnmente como BBV (Volume 29, Issue 1, February 1986, Pages 25-49), tuvo un impacto tan importante que mereció un número especial (el citado arriba) del Journal of Public Economics para celebrar su 20 aniversario. A lo largo del artículo se trabaja sobre un modelo de equilibrio general introduciendo bienes públicos y privados, que ya se utilizaba hasta el momento. Sin embargo los propios autores avisan al lector de que sus conclusiones contienen ciertas sorpresas. A grandes rasgos, sus afirmaciones son las siguientes:

- Los impuestos de tanto alzado sobre los contribuyentes para financiar un bien público generan un efecto "crowding out" sobre las contribuciones privadas
- La suma total de bien público es independiente ante redistribuciones de riqueza (al menos para pequeñas redistribuciones en las que no cambia el panel de consumidores).
- Las redistribuciones que tienden a igualar la renta pueden potencialmente reducir el nivel de bien público financiado de forma privada,
- Cuando las preferencias son idénticas todos los contribuyentes a la financiación del bien público tendrán el mismo nivel de consumo independientemente de sus ingresos.

Los autores parten de resultados habituales de la teoría de bienes públicos, como por ejemplo que en general los bienes públicos puros serían provistos por debajo del nivel eficiente si dependiesen de contribuciones voluntarias por diversos motivos, muchos de ellos relacionados con ocultación de preferencias y de disposición a pagar por ellos (definido formalmente como problema del free-rider, ya mencionado anteriormente).

Sin embargo también hemos mencionado que existen importantes ejemplos de casos en los que bienes públicos puros son financiados de forma voluntaria. Aparte de los ejemplos de donaciones privadas por beneficencia y motivos humanitarios, existen ejemplos como la financiación de campañas electorales por parte de los partidos políticos o como el ya nombrado software libre (apartado 2.2). Incluso en alguna teoría sobre la voluntariedad de financiación de bienes se afirma que "gran parte de la actividad económica de la unidad familiar deber ser explicada como el resultado de contribuciones voluntarias" (Becker, 1981).

Bergstrom, Blume y Varian están de acuerdo con aquellos estudios previos sobre las contribuciones voluntarias en los que se afirma que un análisis completo debería permitir a cada consumidor ser consciente tanto su propia contribución como de la relación con el total de las contribuciones (dicho de otra forma, la relación con la oferta agregada del bien público en cuestión). En definitiva, un modelo completo debería recoger las preferencias de aquellos consumidores que sienten una satisfacción al "poner su granito de arena". También aquellos que deseen obtener admiración o reconocimiento social querrán saber (y que los demás sepan) si su contribución tiene un efecto relevante en la oferta agregada.

Sin embargo, a pesar del interés en un modelo general, en este documento se centra la atención en casos en los que los consumidores sólo se interesan (su satisfacción o utilidad solo se basa) en su propio consumo y en la oferta total de bienes públicos (para Bergstrom, Blume y Varian es el modelo más aceptado y en el cual la mayoría de los economistas basan sus intuiciones). De hecho la mayoría del trabajo teórico y experimental previo trabaja sobre este tipo de modelos.

En la mayoría de los estudios, el equilibro debe cumplir las condiciones del equilibrio de Nash, en el que cada consumidor realiza la mejor decisión posible, dadas las decisiones de los demás. En el equilibrio de Nash además, se asume que las decisiones de contribución de los individuos son independientes entre sí.

Por tanto, para poder profundizar en el caso que nos plantean estos tres autores debemos abordar antes ciertas cuestiones. En primer lugar, hablamos de provisión privada, esto es, son los consumidores quienes deciden la cantidad de bien público y quienes pagan o financian dicha provisión. A continuación se necesita saber en qué condiciones el mercado de bienes públicos alcanza el equilibrio, no de forma parcial como al principio del documento, sino de forma "general" es decir, teniendo en cuenta que en la las preferencias de los consumidores intervienen tanto el consumo de bienes públicos como las aportaciones a la financiación de los mismos, pero también su consumo privado. Además este equilibrio corresponderá a la noción de equilibrio de Nash. También hace falta tener en cuenta la posibilidad de que algunos individuos decidan no contribuir a la financiación del bien público que se provee en el mercado. De forma paralela necesitaremos también extender la noción de provisión eficiente para poder compararla con el resultado de la provisión privada.

En ese momento estaremos en disposición de plantear el modelo presentado en el artículo y discutir sus consecuencias mediante el uso de gráficos generados con Mathematica.

3.1.1.Escenario básico del modelo. Preferencias, dotación inicial y restricción presupuestaria.

En este apartado se definen las bases del modelo sobre el que posteriormente discutiremos las afirmaciones y conclusiones de Bergstrom, Blume y Varian en su estudio. Para comenzar partiremos de un modelo simplificado, en el que la sociedad cuenta únicamente con dos consumidores. Se plantea la decisión de qué cantidad de un bien debe ser provista. Será un bien que ambos podrán utilizar al mismo tiempo (no rival) y será imposible excluir a ninguno de los dos individuos de su consumo. Es por tanto un bien público puro al que llamaremos G. La notación que utilizaremos parte del manual Microeconomic Analysis" (Varian, 1992), y será:

- w_1 y w_2 → riqueza inicial de los individuos 1 y 2
- g_1 y g_2 → contribución que harán a la compra del bien público en cuestión
- x_1 y x_2 → dinero restante para utilizar en consumo privado.

Así las restricciones presupuestarias serán:

- $x_1+g_1 = w_1$
- $x_2+g_2 = w_2$

En realidad lo único que expresan estas restricciones es que los individuos reparten toda su riqueza entre su consumo privado y su aportación a la financiación del bien público. Por tanto, sus preferencias deberán mostrar de qué forma desean repartir su riqueza entre estos dos objetivos. Dicho de otra forma, sus preferencias deben expresar la satisfacción que proporciona a cada uno de ellos la consumición de bienes privados y la que proporciona el consumo de bien público (ya que en consecuencia lo financiarán más o menos). Las funciones de utilidad que vamos a utilizar son de tipo Cobb-Douglas, ya que cumplen todas las propiedades que generalmente exigimos a las preferencias.

Suponemos que cada unidad monetaria aportada a uno de los dos bienes constituye una unidad del mismo, de manera que $p_x = p_G = 1.$ Esto es habitual en el caso del consumo privado, ya que lo agrupamos en un único "bien compuesto" medido en unidades monetarias. Para el bien público podemos considerar, tal y como dice Varian (1992) que si el dinero gastado se convierte en un bien público a través de una función $f(q)$, ésta está ya subsumida en la función de utilidad. Si trasladamos este supuesto a las funciones de utilidad obtenemos que:

$$U_i(x_i, G) = U_i(x_i, f_i(G))$$

Así, las funciones de utilidad de los individuos 1 y 2 serán:

$$U_1(x_1, g_1 + g_2) = {x_1}^{1-\alpha 1}(g_1 + g_2)^{\alpha 1}$$

$$U_2(x_2, g_1 + g_2) = {x_2}^{1-\alpha 2}(g_1 + g_2)^{\alpha 2}$$

A partir de estas funciones elaboraremos el resto de nuestro desarrollo teórico y práctico.

3.2. Noción de eficiencia

En primer lugar hemos de preguntarnos el significado del concepto "eficiente" en el contexto teórico en el que se sitúa el estudio. Varian entiende por provisión eficiente aquella que cumple las propiedades de eficiencia de Pareto. Por tanto, este será el primer paso a realizar para hallar el nivel de provisión eficiente: definir la eficiencia de Pareto, y ver como se aplica a las preferencias de tipo Cobb-Douglas que hemos definido.

Una situación es considerada óptima en el sentido de Pareto cuando "no es posible mejorar el bienestar de alguien sin que nadie salga perjudicado." (Miguel Ángel Galindo Martín: Diccionario de economía aplicada: política económica, economía mundial, p27). Una asignación factible "x" es eficiente por tanto en el sentido de Pareto cuando "no existe otra asignación factible "y" tal que:

- $U_i(y_i) \geq U_i(x_i)\ \forall\, i$
- $U_j(y_j) > U_j(x_j)$ para al menos algún j" (2005 Pearson Education, Chapter 16)

A continuación debemos plantear el problema matemático que nos lleve a estos puntos eficientes en el sentido de Pareto. El hablar de eficiencia nos puede llevar al engaño de pensar que estos puntos harán que la utilidad de la sociedad sea máxima. No obstante, la optimalidad en sentido de Pareto es un criterio de estricta eficiencia formal desvinculado de la justicia redistributiva, o de la libertad de elección de los individuos. Varian realiza un desarrollo teórico relacionado con el teorema de la imposibilidad de Arrow previo al planteamiento del problema.

Sin entrar en demasiados detalles, Arrow afirma que el problema general del bienestar consiste en elegir entre varios "estados de la sociedad". A continuación plantea la siguiente cuestión: "¿Existe una clasificación de estos estados a escala social que registre correctamente las preferencias de los individuos?"(*K. Arrow (1963), Social Choice and Individuals Values, New Haven, Yale University press*). El teorema de la imposibilidad de Arrow consiste en demostrar que no existe una clasificación social razonable de estos estados (ni siquiera en el caso simple de tan solo dos individuos).

Varian, en su desarrollo, descarta la maximización absoluta de la utilidad y adopta esta "relatividad" que se desprende del teorema de Arrow. A pesar de eso, demuestra a nivel matemático y conceptual que la maximización de la suma ponderada de las funciones de utilidad de los individuos, sí nos llevará a todos aquellos puntos "Pareto-eficientes" que sean factibles (Análisis Microeconómico, cap 17, p385-89).

A continuación, como ya hemos comentado anteriormente, desarrollamos esta idea para dos individuos con preferencias de tipo Cobb-Douglas

$$U_1(x_1, g_1 + g_2) = {x_1}^{1-\alpha 1}(g_1 + g_2)^{\alpha 1} \ , \quad U_2(x_2, g_1 + g_2) = {x_2}^{1-\alpha 2}(g_1 + g_2)^{\alpha 2}$$

El problema a desarrollar es el siguiente

$$\max\ a_1 * u_1(w_1 - g_1, g_1 + g_2) + \ a_2 * u_2(w_2 - g_2, g_1 + g_2)$$

Varian demuestra, a través del desarrollo de las derivadas parciales de la suma ponderada, que la condición de eficiencia en este caso es que "la suma de las disposiciones marginales a pagar sea igual al coste marginal de la provisión" (*Análisis microeconómico, Varian, p492*)

Por tanto aceptamos que $RMS_1 + RMS_2 = 1$, e introducimos nuestras preferencias Cobb-Douglas en esta condición. A través del desarrollo algebraico que podemos ver en el ANEXO 1,obtenemos la siguiente solución.

$$x_1 = (w_1 + w_2) * (1 - \alpha_1) - \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} * x_2$$

$$\boldsymbol{G = \alpha_1 * (w_1 + w_2) + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) * x_2}{(1 - \alpha_2)}}$$

No es posible obtener una única solución en la que se obtenga x_1, x_2 y G como función de los parámetros sino que existe todo un continuo de asignaciones en el que se satisface esta condición de eficiencia. Es posible establecer vectores de soluciones con soluciones únicas si añadimos una nueva condición a la solución. Vamos a desarrollar dos ejemplos típicos. A pesar de que es un proceso sencillo, veremos que también es bastante laborioso llegar a la solución final.

3.2.1.Contribución igualitaria

En este caso ambos contribuyentes aportan lo mismo a la financiación del bien público (G), por lo que ${g_1}^I = {g_2}^I$. Sustituyendo y despejando x_1 obtenemos la siguiente expresión (desarrollo completo en el ANEXO 6):

$$ {x_1}^I = \frac{[w_1(2-\alpha_2) - \alpha_2 w_2] * (1-\alpha_1)}{2-\alpha_1-\alpha_2} $$

De esta forma hemos hallado la demanda de bien privado del individuo 1. Sustituyendo este resultado obtendremos la demanda del individuo 2, ${x_2}^I$ y también la cantidad de bien público a proveer, G^I.

3.2.2.Contribución proporcional a la renta

En este caso cada individuo aportará más o menos a la financiación del bien público dependiendo de la riqueza que posean; en concreto de forma totalmente proporcional. Así, la restricción que añadimos es $\frac{{g_1}^P}{w_1} = \frac{{g_2}^P}{w_2}$. Sustituimos x_1 por el valor eficiente y tal y como vemos en el ANEXO 1, despejando x_2 obtenemos:

$$ \boldsymbol{{x_2}^P = \frac{w_2 * (w_1 + w_2) * (1-\alpha_1) * (1-\alpha_2)}{2-\alpha_1-\alpha_2}} $$

Una vez obtenida la demanda del individuo 2 podemos obtener también de forma inmediata la del individuo 1 mediante su sustitución, así como la G^p eficiente.

3.3. Equilibrio de Nash. Definición y aplicación al caso propuesto. Provisión privada de un bien público.

3.3.1.Definición formal de equilibrio de Nash. Provisión privada, desarrollo teórico y matemático.

"Un equilibrio de Nash del juego en forma estratégica $G=(X_1,\dots,X_n,H_1,\dots,H_n)$ es una combinación de estrategias $x=(x_1,\dots,x_n)$ tal que para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, $H_i(x) \geq (x_{-i}, x'_i)\ \forall x'_i \in X_i$ siendo $(x_{-i}, x'_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$" ("Introducción a la teoría de juegos", M. Davis, 1986).

De manera más informal, podemos decir que un equilibrio de Nash en una situación en la que todos los agentes toman la mejor opción (llevan a cabo la mejor estrategia) posible dado lo que han hecho (dada la estrategia) del resto de agentes. En cierto modo nos situamos en un escenario en el que las expectativas de los agentes sobre el resto de agentes se cumplen, y todos están en la mejor situación posible dadas esas expectativas. Así pues, ningún agente tiene incentivos para modificar individualmente su estrategia, y por eso esta situación es de equilibrio.

En el ya citado manual de Varian, se lleva a cabo un desarrollo teórico del problema de maximización en el que se concluye que los agentes elegirán su aportación a la financiación de bienes públicos con el objetivo de maximizar su utilidad dadas las circunstancias, lo cual nos lleva a una situación de equilibrio de Nash.

¿Cómo se llega a esta conclusión? En un primer momento se podría plantear el problema de maximización del individuo 1, sin "tener en cuenta" de qué forma elegirá el individuo 2 su aportación (aunque sí la aportación en sí misma). De esta forma, Varian plantea el siguiente problema:

$$max\ u_1(w_1 - g_1, g_1 + g_2)$$
$$s.a.\ g_1 \geq 0$$

La restricción surge de forma natural, ya que la cantidad que el individuo aportará al bien público no será nunca negativa (no puede serlo partiendo de su decisión unilateral). La condición de primer orden de este problema, llamada condición de Kuhn-Tucker es:

$$\frac{\partial u_1(x_1, G)}{\partial G} - \frac{\partial u_1(x_1, G)}{\partial x_1} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{\partial u_1(x_1, G)}{\partial G}}{\frac{\partial u_1(x_1, G)}{\partial x_1}} \leq 1$$

En caso de que g_1 sea mayor que 0, se cumple la igualdad estricta del cociente a 1. Al interpretarlo en clave económica, encontramos que el agente 1 decidirá aportar una cantidad positiva a la financiación de G si su relación marginal de sustitución entre el bien público y el privado es igual a su coste marginal, que es 1.

En caso de que la relación marginal de sustitución fuese menor que 1, el agente podría tomar ventaja de la situación del mercado no aportando nada a la financiación del bien público y utilizando toda su dotación para su consumo privado, de forma que g1=0, x1=w1, y el agente 1 se convierte en un "free-rider" o polizón. Todo esto hace que la forma de definir la recta presupuestaria sea algo más compleja. Sin embargo, se concreta posteriormente junto con la Imagen 13 dado que su representación gráfica es muy ilustrativa.

Para poder continuar, conviene puntualizar algo muy relevante para la resolución de este problema: la elección del agente 1 de la cantidad a aportar a la financiación de G que acabamos de explicar, es simultánea a la elección del agente 2 de la suya. Como la cantidad existente de G depende de estas dos aportaciones, podemos concluir que la elección de g_1 depende en cierta medida de g_2 y viceversa. Ahora sí podemos decir que ambos individuos maximizaran su utilidad con expectativas sobre la elección del otro, y la dinámica del modelo nos llevará a un punto de equilibrio cuando estas expectativas se cumplan, y por tanto ambos agentes se encuentren en la mejor situación posible dada la elección del otro; o lo que es lo mismo, en un equilibrio de Nash.

3.3.2.Provisión privada en el caso de las funciones de utilidad de tipo Cobb-Douglas. Funciones de reacción y equilibrio de Nash.

Después de definir el equilibrio de Nash formalmente, y de ver que la provisión privada de bienes públicos nos lleva inevitablemente a una situación de este tipo, vamos a definir a nivel matemático los valores de este equilibrio. Para ello, recordamos las funciones de utilidad a utilizar en el problema:

$$U_1(x_1, g_1 + g_2) = {x_1}^{1-\alpha 1}(g_1 + g_2)^{\alpha 1}\ , \quad U_2(x_2, g_1 + g_2) = {x_2}^{1-\alpha 2}(g_1 + g_2)^{\alpha 2}$$

A continuación planteamos el problema de maximización para el individuo 1. La restricción expresa que el individuo repartirá su dotación inicial entre consumo privado y aportación a la provisión del bien público:

$$\max U_1(x_1, g_1 + g_2)$$

$$s.a.\ x_1 + g_1 = w_1$$

Para resolverlo construimos la función Lagrangiana y hallamos sus derivadas parciales. Mediante igualación resolvemos el sistema que forman y despejamos en última instancia el valor de x_1 (desarrollo completo en el ANEXO 7 - Dos consumidores con preferencias Cobb-Douglas. Un bien público y un bien privado. Obtención de las curvas de reacción y de la solución de equilibrio de Nash.):

$$\boldsymbol{x_1 = (1 - \alpha_1)\,(w_1 + g_2)}$$

De esta forma se ha obtenido la demanda de bien privado del consumidor 1, que depende de sus preferencias, de su renta y de la aportación de los demás a la financiación del bien público. Vemos que cuanta más renta tiene el individuo, más bien privado demanda. Así mismo, cuanta más financiación aporta el resto de la sociedad al bien público, menos querrá aportar nuestro individuo (porque le hará falta aportar menos para que G llegue al nivel que satisfaga sus necesidades) y más renta "liberará" para dedicarla a su consumo privado, aumentando su demanda de x_1.

A partir de esta función de demanda de bien privado, queremos obtener la aportación del individuo en cuestión a la financiación del bien público en función del resto de parámetros y variables. Partimos de la restricción obtenida a partir de la tercera derivada parcial, despejamos g_1 y sustituimos la función de demanda de g_1 que acabamos de obtener:

$$g_1 = w_1 - x_1$$

$$\boldsymbol{g_1 = w_1\alpha_1 - (1 - \alpha_1)\, g_2}$$

Esta última expresión es lo que llamamos **función de reacción** del bien 1, ya que una vez dados los parámetros iniciales (riqueza y preferencias de los individuos) expresa la aportación a la financiación del bien público por parte del individuo 1 en función de lo que haga el individuo 2 (resto de la sociedad). De la misma forma hay una función de reacción del consumidor 2:

$$\boldsymbol{g_2 = w_2\alpha_2 - (1 - \alpha_2)\, g_1}$$

más atrás de obtener estas funciones habíamos definido el equilibrio de Nash como una situación en la que todos los agentes toman la mejor opción (llevan a cabo la mejor estrategia) posible dado lo que han hecho (dada la estrategia) del resto de agentes. Si lo aplicamos a este problema, es aquella situación en que el individuo 1 establece g_1 siendo g_2 cierta y viceversa, el individuo 2 establece g_2 siendo g_1 cierta. Dada la definición de las funciones de reacción, el equilibrio de Nash debe ser un punto perteneciente tanto a la función de reacción del individuo 1 como a la del individuo 2, es decir, su intersección. Por tanto planteamos el sistema de ecuaciones formado por las dos funciones de reacción (desarrollo en el ANEXO 7 - Dos consumidores con preferencias Cobb-Douglas. Un bien público y un bien privado. Obtención de las curvas de reacción y de la solución de equilibrio de Nash.) y obtenemos:

$$g_1 = w_1\alpha_1 - (1 - \alpha_1)[w_2\alpha_2 - (1 - \alpha_2)g_1]$$

Por último despejamos g_1. En este caso será el valor correspondiente al equilibrio de Nash. Por analogía podemos hallar también g_2 en el equilibrio de Nash.

$$g^N{}_1 = \frac{w_1\alpha_1 - w_2\alpha_2(1 - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2} \quad , \qquad g^N{}_2 = \frac{w_2\alpha_2 - w_1\alpha_1(1 - \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2}$$

El valor del bien público en el equilibrio de Nash será la suma de la aportación de la sociedad a su financiación en ese punto es decir, el valor de la suma de las aportaciones individuales de los diferentes consumidores.

$$G^N = g^N{}_1 + g^N{}_2 = \frac{(w_1 + w_2)\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2}$$

Notese que la G total depende del valor total de la riqueza existente, y no de su distribución entre los individuos.

3.4. Provisión eficiente. Solución gráfica a través del uso de Mathematica.

3.4.1.Aplicación del lenguaje de Wolfram Mathematica a la maximización con restricciones.

A lo largo de los siguientes apartados vamos a aplicar Mathematica como herramienta instrumental para mostrar a nivel gráfico los desarrollos teóricos de la solución eficiente y la solución de equilibrio de Nash ya explicadas a nivel algebraico en los apartados previos. Para ello continuaremos haciendo uso del comando *Manipulate* para generar soluciones dinámicas. Dentro de los "*Manipulate*" incluiremos funciones "*Solve*" para hallar soluciones de diferentes ecuaciones (en nuestro desarrollo habitualmente los valores eficientes o los valores de equilibrio de g que proceden de problemas de maximización), y representaremos las funciones de utilidad y las restricciones mediante la función "*ContourPlot*", que permite representar funciones implícitas.

3.4.2.Provisión eficiente de bienes públicos.

Al igual que en el desarrollo teórico de la Noción de eficiencia, la solución de este problema es un intervalo de asignaciones. También hemos visto que a través de la introducción de restricciones adicionales (paridad o proporcionalidad a la renta en la financiación de G) obtenemos vectores de soluciones numéricas. A pesar de que sí que será interesante verlo representado gráficamente en comparación con el resultado de la provisión privada, de forma aislada no nos aporta mucha información.

Por tanto, el objetivo del uso de Mathematica en este caso será la simplificación de cálculos. Además, una vez calculada la solución general, nos permite introducir en la solución final las restricciones adicionales que deseemos sin realizar un esfuerzo adicional.

Para resolver el problema seguimos un proceso análogo al del apartado 3.2. En primer lugar planteamos las funciones y hallamos sus relaciones marginales de sustitución (Imagen 5).

```
RMS1 (G, x1) + RMS2 (G, x2) = 1

u1[G_, x1_] = x1^(1 - a1) G^a1
G^a1 x1^(1-a1)

u2[G_, x2_] = x2^(1 - a2) G^a2
G^a2 x2^(1-a2)

rms1[G_, x1_] = D[u1[G, x1], G] / D[u1[G, x1], x1]
  a1 x1
(1 - a1) G

rms2[G_, x2_] = D[u2[G, x2], G] / D[u2[G, x2], x2]
  a2 x2
```

Imagen 5 – Introducción de RMS en Mathematica.

Después de definir las relaciones marginales de sustitución planteamos el sistema de ecuaciones con la suma de las mismas igualada a 1 y las restricciones, y lo resolvemos con la función *Solve*:

```
Solve[{rms1[G, x1] + rms2[G, x2] == 1, G + x1 + x2 == w1 + w2}, {G, x1}]
resuelve
{{G → -(a1 w1 - a1 a2 w1 + a1 w2 - a1 a2 w2 - a1 x2 + a2 x2)/(-1 + a2), x1 → -(w1 - a1 w1 - a2 w1 + a1 a2 w1 + w2 - a1 w2 - a2 w2 + a1 a2 w2 - x2 + a1 x2)/(-1 + a2)}}
```

Imagen 6 - Solución eficiente en Mathematica

Como ya hemos comentado, existen múltiples soluciones. Podemos plantear dos alternativas en lo que se refiere a la financiación: Que aporten a partes iguales para sufragar el bien público, o que aporten diferentes cantidades en proporción a su dotación inicial w_i: En el primer caso $g_1 = g_2$ implica que $w_1 - x_1 = w_2 - x_2$:

```
Solve[{rms1[G, x1] + rms2[G, x2] == 1, G + x1 + x2 == w1 + w2,
resuelve
  w1 - x1 == w2 - x2}, {G, x1, x2}]
{{G → 2 (-a1 w1 + a1 a2 w1 - a2 w2 + a1 a2 w2)/(-2 + a1 + a2),
  x1 → -(2 w1 - 2 a1 w1 - a2 w1 + a1 a2 w1 - a2 w2 + a1 a2 w2)/(-2 + a1 + a2),
  x2 → -(-a1 w1 + a1 a2 w1 + 2 w2 - a1 w2 - 2 a2 w2 + a1 a2 w2)/(-2 + a1 + a2)}}
```

Imagen 7 – Solución eficiente igualitaria en Mathematica.

Vemos que no hace falta un nuevo desarrollo teórico, sino que basta con introducir una nueva restricción en la función "*Solve*", simplificando en gran medida la resolución. Lo mismo ocurre con el segundo caso (Anexo 2)

A pesar de la aparente complejidad de las soluciones de Mathematica, es posible comprobar que tienen sentido económico de una manera muy sencilla. Para ello realizamos la suma de los valores correspondientes a la cantidad de bien público, y a las demandas de bien privado:

```
Simplify[(w1 + w2) (-a1 w1 + a1 a2 w1 - a2 w2 + a1 a2 w2)/(-w1 + a2 w1 - w2 + a1 w2) -
simplifica
  (1 - a1 - a2 + a1 a2) w1 (w1 + w2)/(-w1 + a2 w1 - w2 + a1 w2) - (1 - a1 - a2 + a1 a2) w2 (w1 + w2)/(-w1 + a2 w1 - w2 + a1 w2)]
w1 + w2
```

Imagen 8 – Comprobación de soluciones. Solución eficiente igualitaria.

Como ya preveíamos, el resultado es la suma de las dotaciones iniciales de los individuos, es decir, toda la riqueza existente en la economía.

En el ANEXO 2 se encuentran los cálculos con Mathematica de las imágenes anteriores, así como el caso de la eficiencia con aportación proporcional.

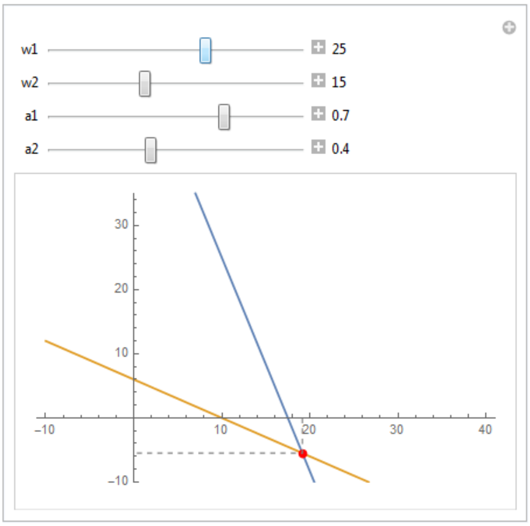
3.4.3.Funciones de reacción. Representación gráfica.

En el apartado anterior, hemos comprobado a través del cálculo de la provisión eficiente que Mathematica ofrece numerosas ventajas a la hora de simplificar cálculos, introducir o cambiar restricciones en un problema o incluso verificar que el resultado final de un problema se corresponde con los supuestos teóricos de los que parte.

También en el caso del equilibrio de Nash hemos repetido el desarrollo matemático haciendo uso del programa y hemos obtenido de esta forma las curvas de reacción de ambos individuos (Anexo 3), pero el mayor interés reside en la posibilidad de visualizar los resultados a nivel gráfico, y su evolución en función de cómo cambien los parámetros de las funciones.

Partimos pues de la constatación de que las funciones de reacción son funciones lineales en las que solo intervienen las variables g_1 y g_2, por lo que su representación gráfica es sencilla. Lo hacemos a través del uso del comando "*Plot*". Para ello reescribimos la función de reacción del individuo 1 de manera que g_1 sea en ambas funciones de reacción la variable independiente, y g_2 la dependiente. Así, para el individuo 2, se obtiene la expresión $g_2 = w_2\alpha_2 - (1-\alpha_2)g_1$ y para el individuo 1 obtenemos que $g_1 = \frac{w_1\alpha_1 - g_1}{1-\alpha_1}$.

Podríamos representar de forma inmediata la intersección de estas funciones (y de hecho lo hemos hecho en el Anexo 3), pero existe un nuevo problema a solucionar: dependiendo de los valores de los parámetros las expresiones del equilibrio de Nash pueden dar como resultado aportaciones negativas tal y como vemos en la Imágenes 9, lo cual no tiene sentido.




```
Solve[{g1 == (-1 + a1) g2 + a1 w1, g2 == (-1 + a2) g1 + a2 w2}, {g1, g2}]
resuelve
{{g1 → -(a1 w1 - a2 w2 + a1 a2 w2)/(-a1 - a2 + a1 a2), g2 → -(-a1 w1 + a1 a2 w1 + a2 w2)/(-a1 - a2 + a1 a2)}}
```

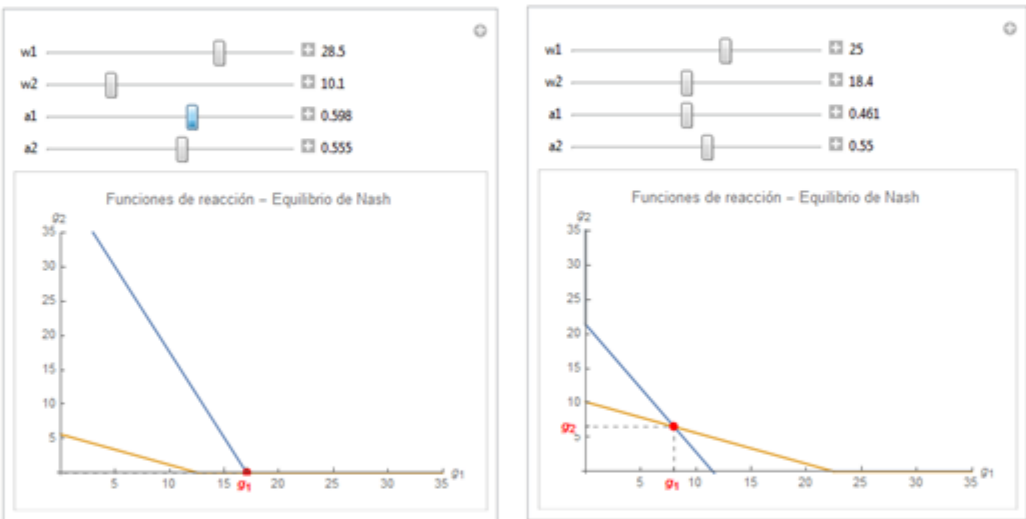
Imágenes 9 y 10 – Funciones de reacción como funciones lineales. Solución negativa y resolución algebraica.

Éste resultado, y por tanto este tipo de representación gráfica, funciona bien cuando el equilibrio es interior, pero no para soluciones de esquina. Para solucionarlo, de forma análoga a lo que hacíamos en el apartado 2.4.1 con las funciones inversas de demanda, definimos nuestras funciones mediante máximos, de forma que las soluciones negativas quedan descartadas:

$$g_1 = Max[w_1\alpha_1 - (1-\alpha_1)g_2, 0]\ ,\ g_2 = Max[w_2\alpha_2 - (1-\alpha_2)\ g_1, 0]$$

Esto hace un poco más complicada la representación con Mathematica para la curva de reacción del individuo 1, pues para $g_1 = 0$ habría muchos valores de g_2, y eso no se puede hacer con *Plot*, que representa funciones. Se podría hacer con representación de función implícita, mediante *ContourPlot*, pero también es posible, y más simple, "dibujar" la parte correspondiente al eje vertical.

También queremos añadir algunas de las múltiples opciones gráficas que ofrece Mathematica, para facilitar la comprensión del gráfico. Para ello, entre otras cosas, obtenemos el equilibrio resolviendo el sistema de las dos curvas de reacción (función "*Solve*"). Necesitamos hacerlo así ya que no podemos despejar g_2 para igualar como se hace en la anterior, al tener los "máximos" en las funciones. Cabe destacar que este proceso es complejo o cuanto menos tedioso de llevar a cabo "a mano", y sin embargo Mathematica lo resuelve con facilidad. Opciones como el añadido de etiquetas y de rótulos nos permiten obtener un gráfico como el que vemos a continuación, en el que vemos claramente cómo varía el equilibrio de Nash en función de los parámetros de las funciones, mostrando qué individuos aportan financiación a G y cuanto aporta cada uno:



Imágenes 11 y 12 – Curvas de reacción

3.5. Provisión privada. Solución gráfica, recta presupuestaria y solución de esquina.

Si bien en las funciones de reacción hemos visto que la elección de g_i depende de la decisión del resto de individuos, también intervienen otros parámetros como α_1 y α_2, que proceden de la definición de las funciones de utilidad. En las funciones de reacción subyace un proceso de elección simultánea de los dos agentes, que quieren maximizar su utilidad, y que cada agente realiza por separado.

Para representarlo gráficamente, utilizamos la función *ContourPlot*, en la cual introducimos un vector gn, definido por el problema de maximización de utilidad de los agentes. Para introducir la recta presupuestaria en función de este vector, la reescribimos. Por ejemplo, para el individuo 1, la restricción natural sería $g_1 = w_1 - x_1$. Al despejar w_1 y sumar g_2 a ambos lados obtenemos que $G + x_1 = w_1 + g_2$. De esta forma expresamos que la dotación inicial de cada individuo es igual a la suma total de bien público más su consumo privado. Realizamos también el proceso análogo con el individuo 2.

A través de la función *Solve* que resuelve simultáneamente el problema de maximización de los agentes, junto con las múltiples funciones de representación gráfica, y también con funciones estéticas que ofrece Mathemática obtenemos el siguiente gráfico:

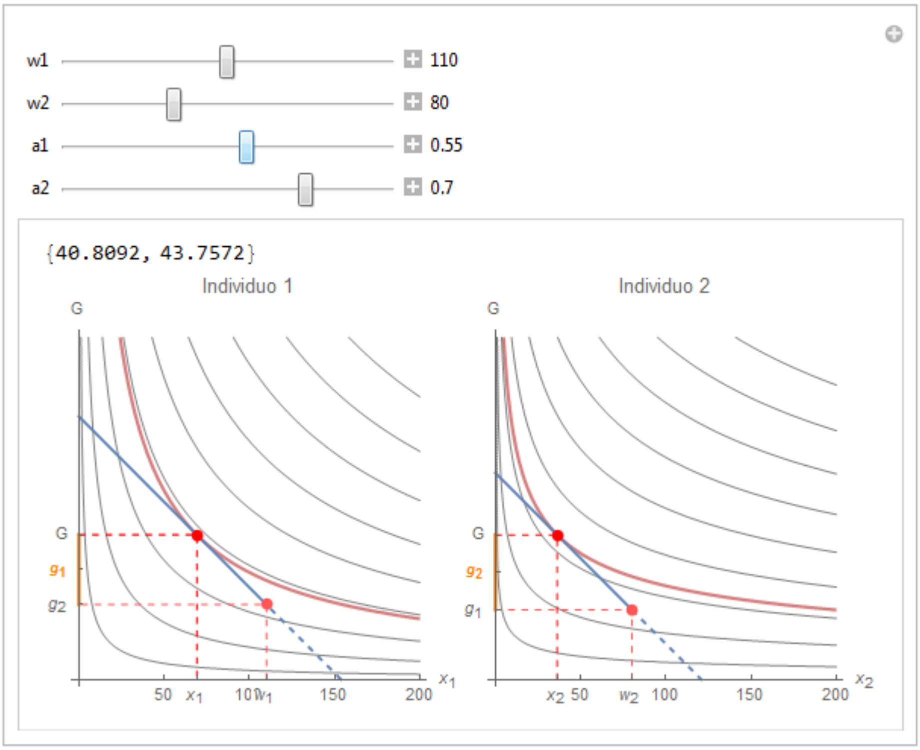


Imagen 13 – Solución de tangencia. Equilibrio de Nash

Podemos observar que cada gráfico por separado se asemeja a un problema de maximización común, en el que se busca el punto de tangencia entre la máxima curva de indiferencia que sea posible y la recta presupuestaria. Como vemos en el gráfico, los puntos viables de la recta presupuestaria son aquellos que están a la izquierda y por encima de la dotación inicial (incluida la propia dotación), lo cual ilustra la condición $g_i = w_i - x_i \geq 0$ (será estrictamente igual en la dotación porque el individuo gasta toda su riqueza en su consumo privado, siendo $x_i = w_i$, y será mayor que 0 en todos los puntos a la izquierda). ¿Por qué los puntos situados a la derecha de la dotación no son viables?

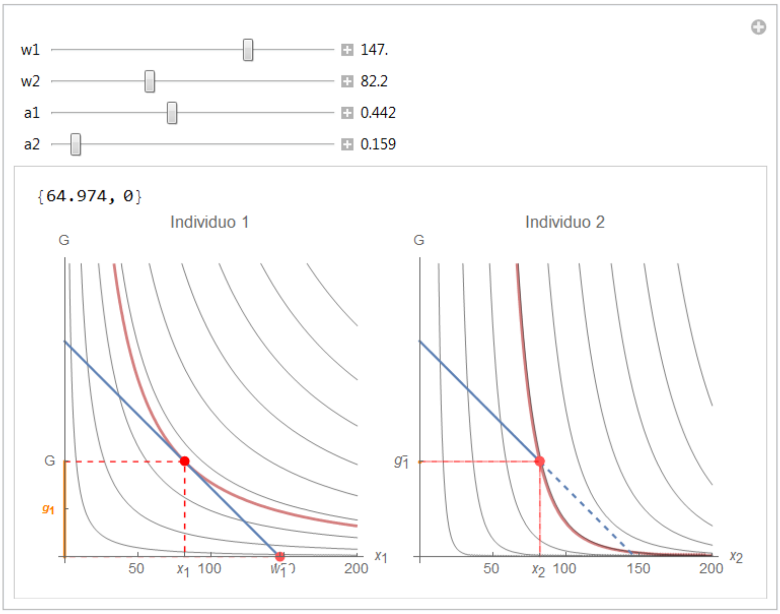


Imagen 14 – Solución de esquina. Equilibrio de Nash.

Supongamos que sí fuesen viables: si la tangencia llevase a una solución en esa región, esta solución necesitaría de una cantidad de bien privado superior a la dotación, y un valor de bien público menor al que ya ha financiado la sociedad, lo cual a su vez requiere un valor de g_i negativo.

En estos casos, como en el de la Imagen 14, interviene la condición de Kuhn-Tucker (mencionada en el apartado teórico), haciendo que todos estos casos sean considerados soluciones de "esquina", en los que el individuo no aporta ninguna cantidad a la financiación del bien público y se comporta como un polizón o "free-rider". La condición de Kuhn-Tucker establece que la relación marginal de sustitución entre el bien público y privado debe ser mayor o igual que 1. Observando la pendiente de la recta presupuestaria y de las funciones de utilidad, vemos que a partir de la solución de esquina la RMS pasa a ser menor que 1 (por lo que hace falta más de una unidad de G para sustituir a una de x) mientras que la pendiente sigue siendo 1.

Además, al desplazar el parámetro α_i para cualquiera de los agentes, la recta presupuestaria se mueve. ¿Por qué ocurre esto? La recta presupuestaria es la recta de pendiente -1 que pasa por la dotación inicial. La dotación inicial está formada por la riqueza total de cada individuo en el eje de las abscisas, y el valor de bien público financiado por el resto de consumidores en ese punto. Al variar las preferencias de uno de los individuos, puede variar la cantidad que el otro quiere aportar a la financiación del bien público, por eso la dotación inicial se mueve al cambiar las preferencias, y con ella la recta presupuestaria. Es decir, el movimiento es reflejo de la interdependencia entre las decisiones de los agentes.

3.6. Provisión privada y provisión eficiente. Comparación. Curvas de isoutilidad.

Después de haber concretado la solución eficiente y la solución de equilibrio de Nash para dos consumidores, realizamos ciertos añadidos a las figuras para comparar los resultados (Anexo 4). En la figura de las curvas de reacción aparecen dos puntos nuevos, que corresponden a las aportaciones de las soluciones eficientes con aportación igualitaria y proporcional. Solo con los puntos ya se puede ver que la provisión del equilibrio de Nash es claramente inferior a la eficiente.

El otro añadido consiste en unas curvas que llamaremos "curvas de isoutilidad". Las curvas de isoutilidad del consumidor 1 recogen combinaciones (g_1,g_2) que, con sus correspondientes valores de x_1, darían la misma utilidad al consumidor 1. Otro grupo de curvas hace lo mismo para la isoutilidad del 2. El consumidor 1 está mejor en curvas más altas y el consumidor 2 incrementa su utilidad en las curvas que se situan más a la derecha. La figura muestra que el equilibrio de Nash no es eficiente, en tanto en cuanto hay pares (g_1,g_2) que ambos individuos considerarían mejores (si bien es equilibrio porque por separado no hay incentivos para variar su decisión).

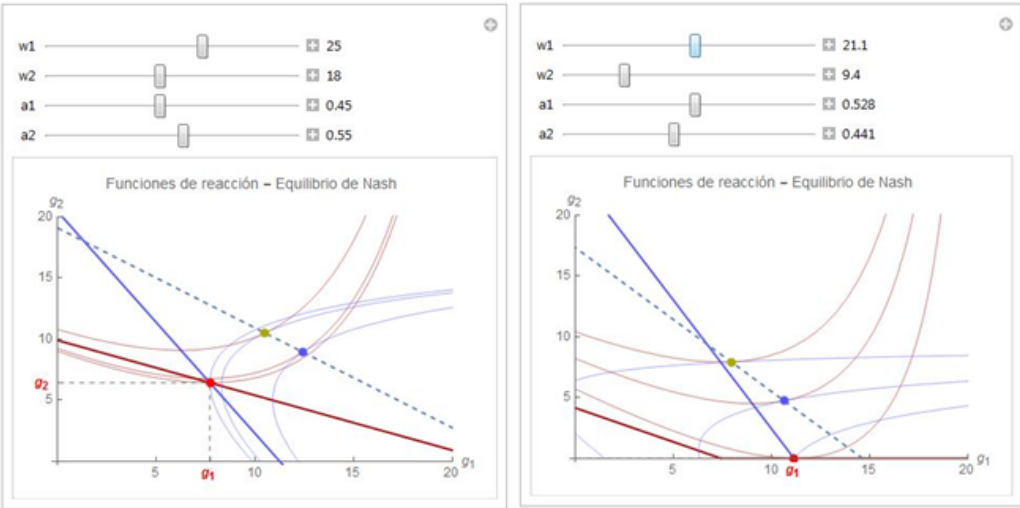


Imagen 15 - Curvas de reacción y curvas de isoutilidad

Se puede observar también que en los puntos eficientes la iso-utilidad del 1 y la del 2 son tangentes. Por último se dibuja también la línea que recoge todos los puntos eficientes en sentido de Pareto, que serán todos los de tangencia, y que resulta ser una línea recta (lo cual probablemente es una característica de las preferencias de tipo Cobb-Douglas).

En cuanto a las figuras que mostraban la tangencia entre curva presupuestaria y curvas de utilidad, se añade una nueva restricción a la figura 1: suponemos que el individuo 2 aporta la cantidad g_2 correspondiente a la solución eficiente igualitaria y añadimos el punto correspondiente a que él hiciera también la aportación g_1 eficiente igualitaria.

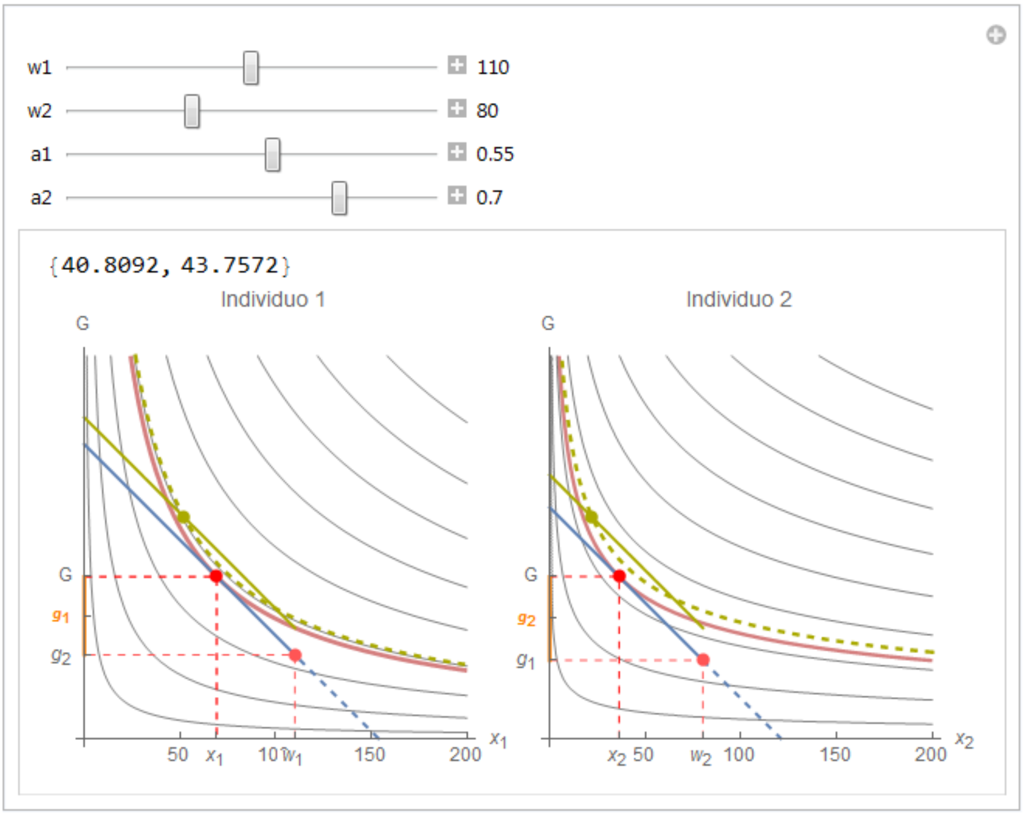


Imagen 16 – Solución de tangencia y solución eficiente.

Si el consumidor 2 cumple con la aportación eficiente, al consumidor 1 le conviene no cumplir para de esta forma maximizar su utilidad; de hecho la figura muestra que bajo el supuesto de que el 2 va a cumplir con g1 eficiente al 1 le conviene buscar el punto de tangencia, en el que su aportación a la financiación decrece.

Por supuesto, en la figura del consumidor 2 está dibujado el proceso análogo (y por tanto contrario) del que sacamos las mismas conclusiones.

4. PROVISIÓN EFICIENTE Y PROVISIÓN PRIVADA DE UN BIEN PÚBLICO CONTINUO. GENERALIZACIÓN A UN MERCADO DE 5 INDIVIDUOS. UNA ILUSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS DE BERGSTROM, BLUME Y VARIAN

4.1. Generalización teórica. Solución eficiente y solución de equilibrio.

Como hemos dicho antes, Varian demuestra, a través del desarrollo de las derivadas parciales de la suma ponderada de funciones de utilidad, que la condición de eficiencia en este caso es que "la suma de las disposiciones marginales a pagar sea igual al coste marginal de la provisión" (*Análisis microeconómico, Varian, p492*).

Nuestra tarea es en este caso demostrar que la afirmación de Varian se cumple en el caso de nuestro mercado con 5 consumidores con preferencias de tipo Cobb-Douglas. En el ANEXO 8 - Condición de eficiencia y relación marginal de sustitución en un mercado de cinco consumidores. vemos como partimos de la suma ponderada de utilidades:

$$\max\ a_1 * u_1(\sum w_1 - g_1, g_i) + a_2 * u_2(\sum w_2 - g_2, g_i) + a_3 * u_3(\sum w_3 - g_3, g_i) + a_4 * u_4(w_4 - g_4, g_i) + a_5 * u_5(\sum w_5 - g_5, g_i)$$

A pesar de que el proceso es farragoso, no hay complicación conceptual en llegar a:

$$\sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{RMS_i = 1}$$

En cuanto a las curvas de reacción, si bien es imposible representarlas para 5 consumidores (sería un gráfico en 5 dimensiones), a través de la maximización con restricciones, mediante la construcción de la función Lagrangiana y de sus derivadas parciales, llegamos a la solución final (ANEXO 6):

$$\boldsymbol{g_1 = \alpha_1 w_1 - (1 - \alpha_1)\,(g_2 + g_3 + g_4 + g_5)}$$

Análogamente la podemos construir para el resto de consumidores.

4.2. Impuestos de tanto alzado como mecanismo de financiación de los bienes públicos.

Para completar el modelo sobre el que poder evaluar algunos de los teoremas del artículo de Bergstrom, Blume y Varian, debemos introducir la posibilidad de que el Estado recaude un impuesto, que dedicará íntegramente a la financiación del bien público.

Llamaremos por tanto t_i al impuesto de tanto alzado que tendrá que pagar el individuo i. La suma total de todos los t_i existentes será el total de la financiación pública del bien público, y la llamaremos g_{pub}. Esta financiación se sumará a las aportaciones privadas de los individuos.

A nivel algebraico hemos de introducir ambas variables en las curvas de reacción. En el siguiente ejemplo vemos como introducirlo en el caso del consumidor 1, y lo haremos de forma análoga para los demás.

$$g_1 = \alpha_1(w_1 - t_1) - (1 - \alpha_1)\left(g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_{pub}\right)$$

$$g_{pub} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$$

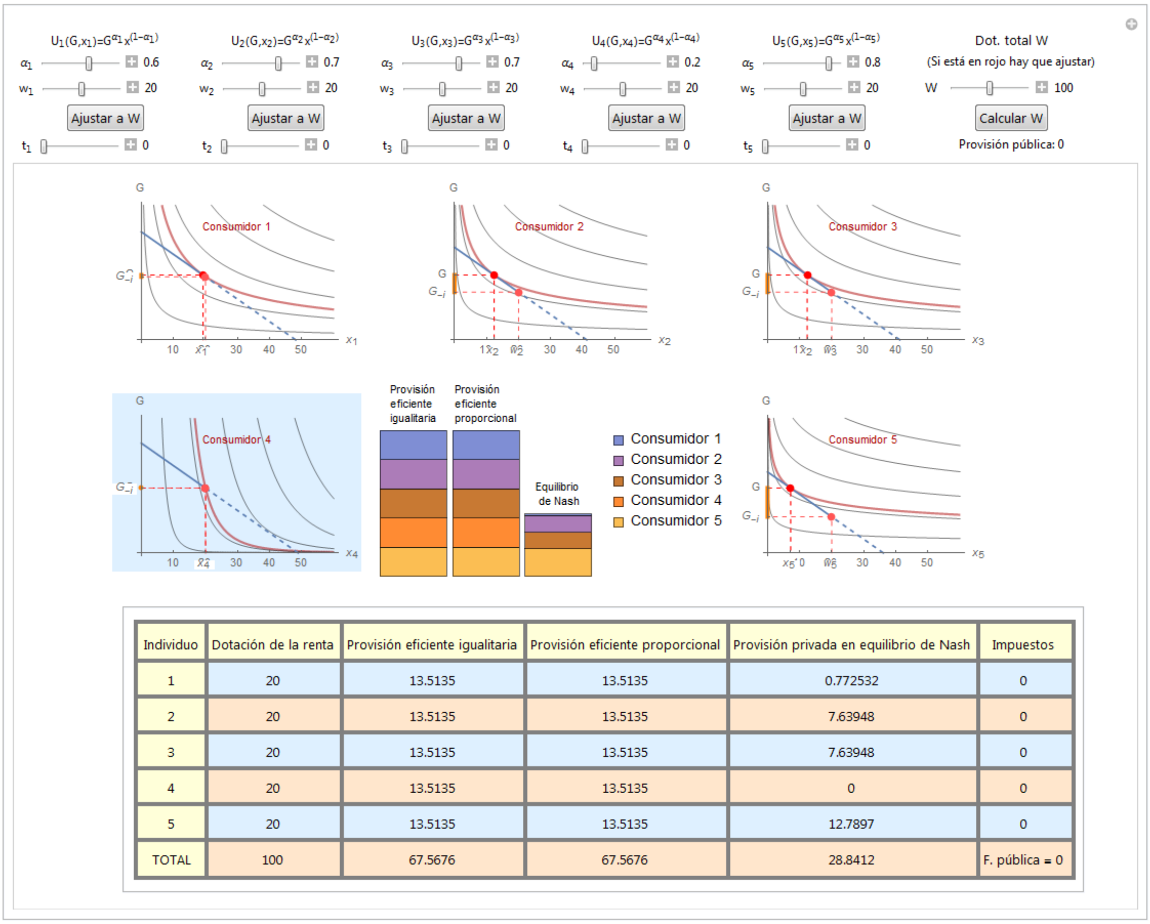
4.3. Uso instrumental de Wolfram Mathematica en la evaluación de teoremas.

Antes de proceder a enunciar y evaluar los teoremas, vamos a proceder a introducir la herramienta que vamos a utilizar para ello. En la Imagen 17 vemos como en la última figura se ha introducido 5 gráficos similares a los del apartado 3.5, en los que vemos la decisión de cada consumidor mediante la tangencia entre recta presupuestaria y curvas de utilidad. En caso de que el consumidor decida no contribuir a la financiación de G, la figura se muestra sombreada en azul.

En la parte central vemos un gráfico de barras que nos permite comparar la provisión de bien público en el equilibrio de Nash con las soluciones eficientes, tanto en caso de aportación igualitaria como en el caso de la aportación proporcional a la renta.

En la parte inferior vemos una tabla con información numérica correspondiente a la aportación de los consumidores en cada caso. Al igual que los gráficos, cambia al desplazar los controles.

Tomaremos los datos de la Imagen 17 como situación inicial de ahora en adelante, a no ser que se afirme lo contrario.



Individuo	Dotación de la renta	Provisión eficiente igualitaria	Provisión eficiente proporcional	Provisión privada en equilibrio de Nash	Impuestos
1	20	13.5135	13.5135	0.772532	0
2	20	13.5135	13.5135	7.63948	0
3	20	13.5135	13.5135	7.63948	0
4	20	13.5135	13.5135	0	0
5	20	13.5135	13.5135	12.7897	0
TOTAL	100	67.5676	67.5676	28.8412	F. pública = 0

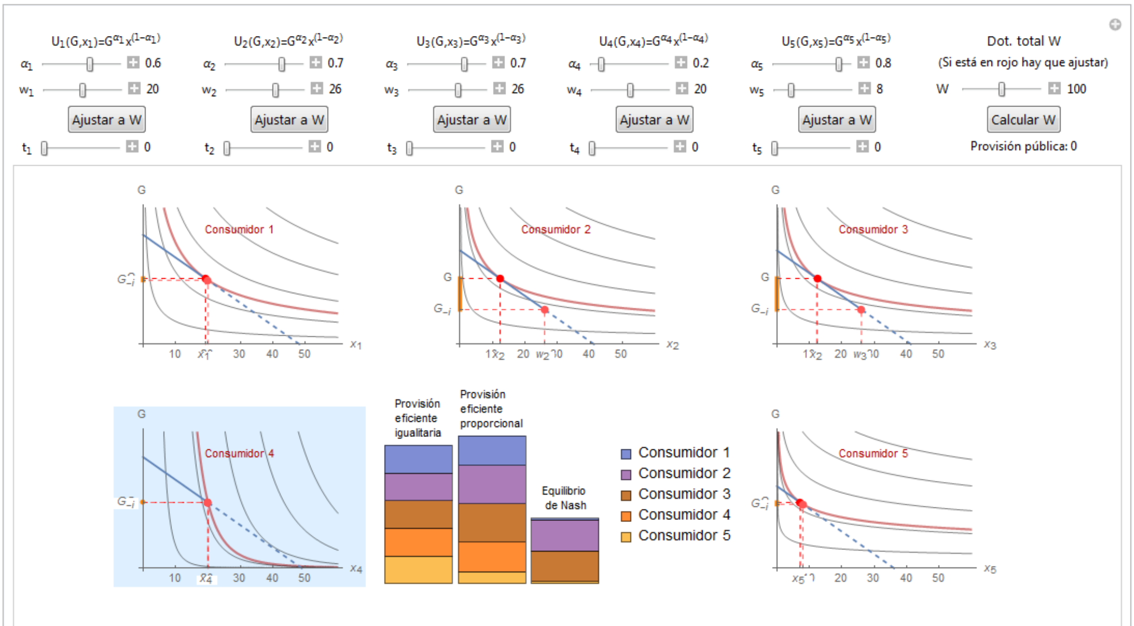
Imagen 17 – Situación inicial

4.4. Enunciación y evaluación de los teoremas de Bergstrom, Blume y Varian.

A lo largo del artículo se realizan diversas afirmaciones sobre las consecuencias de las redistribuciones de renta o de la aplicación de impuestos. El interés de algunos (generalmente sobre la existencia de ciertos equilibrios o propiedades) radica en su potencia matemática dada su capacidad de generalización para casi cualquier tipo de preferencias. Sin embargo es interesante comprobar la aplicación de algunas de ellas a nuestro modelo, por lo que se ilustrarán a través del uso del gráfico construido con Mathemática:

4.4.1.Teorema 1.

"Suponemos que los consumidores con preferencias convexas y sus contribuciones se encuentran originalmente en un equilibrio de Nash. Consideramos una redistribución de renta entre aquellos consumidores que contribuyen (a la provisión del bien público) de forma que ningún consumidor pierde más renta que su contribución original. Después de la redistribución hay un nuevo equilibrio de Nash en el que todos los consumidores han variado su contribución al bien exactamente en la misma cantidad en que ha variado su renta. En este nuevo equilibrio, cada consumidor consume la misma cantidad de bien público y de bien privado que antes de la redistribución de renta."



Individuo	Dotación de la renta	Provisión eficiente igualitaria	Provisión eficiente proporcional	Provisión privada en equilibrio de Nash	Consumo privado en equilibrio de Nash	Impuestos
1	20	12.2162	13.0636	0.772532	19.2275	0
2	26	12.2162	16.9827	13.6395	12.3605	0
3	26	12.2162	16.9827	13.6395	12.3605	0
4	20	12.2162	13.0636	0	20	0
5	8	12.2162	5.22543	0.7897	7.2103	0
TOTAL	100	61.0811	65.3179	28.8412	71.1588	F. pública = 0

Imagen 18 - Neutralidad

Ilustramos este teorema por ser aquél que introduce el concepto de neutralidad, que muestra como bajo ciertas condiciones la provisión de bien público depende de la cantidad total de renta pero es independiente de su distribución.

Efectivamente, comparando los resultados de la Imagen 17 con los de la Imagen 18, al aumentar la dotación de los individuos 2 y 3 en 6 unidades monetarias cada uno, y reducir la del individuo 5 en 12 unidades monetarias, vemos que el teorema se cumple. Las aportaciones a la financiación de G de los consumidores 2 y 3 pasa de 7,6 a 13,6 unidades monetarias (aumenta 6, igual que la dotación); y por su parte la aportación del consumidor 5 decrece de 12,7897 a 0,7897.

4.4.2.Teorema 5

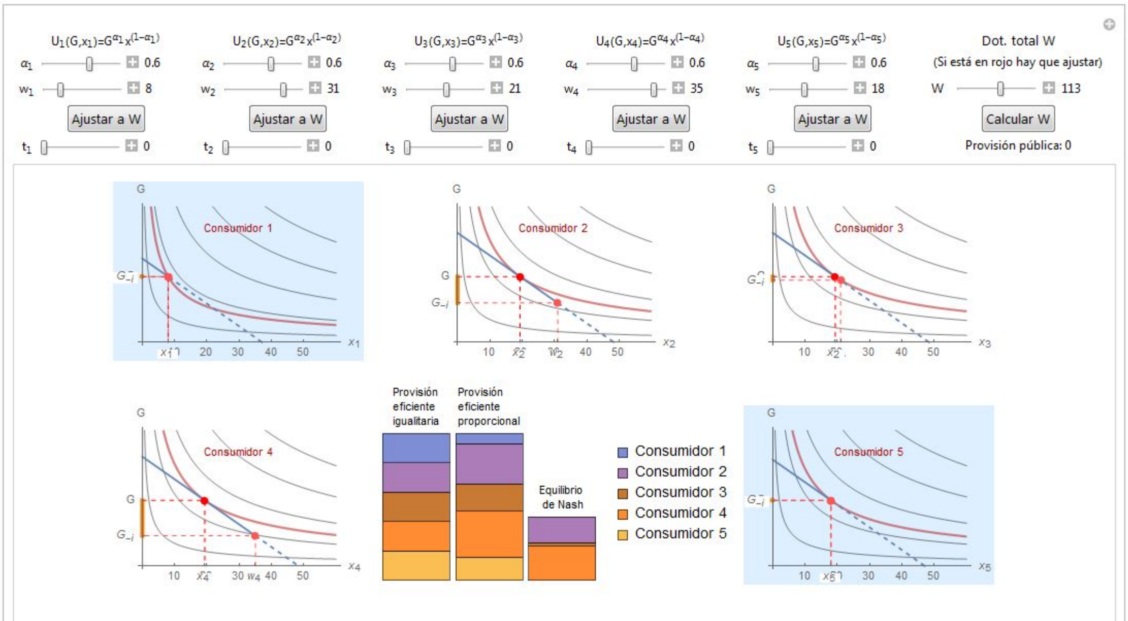
Si las preferencias son idénticas, entonces en un equilibrio de Nash:

i. *Todos los contribuyentes tendrán más riqueza que los no contribuyentes*
ii. *Todos los contribuyentes consumirán la misma cantidad de bien privado y de bien público.*
iii. *Una redistribución igualadora de riqueza nunca incrementará el nivel de equilibrio de provisión voluntaria de bien público.*

iv. *Las redistribuciones igualadoras de riqueza entre no contribuyentes actualmente, o entre contribuyentes, no variará el nivel de provisión de equilibrio.*

v. *Las redistribuciones igualadoras de riqueza que impliquen alguna transferencia de contribuyentes a no contribuyentes harán disminuir el nivel de equilibrio de provisión del bien público.*

Ilustramos la afirmación *ii.* como un ejemplo interesante (Imagen 19), por ser aquella que introduce el consumo de bienes privados.



Individuo	Dotación de la renta	Provisión eficiente igualitaria	Provisión eficiente proporcional	Provisión privada en equilibrio de Nash	Consumo privado en equilibrio de Nash	Impuestos
1	8	13.56	4.8	0	8	0
2	31	13.56	18.6	11.6667	19.3333	0
3	21	13.56	12.6	1.66667	19.3333	0
4	35	13.56	21.	15.6667	19.3333	0
5	18	13.56	10.8	0	18	0
TOTAL	113	67.8	67.8	29.	84.	F. pública = 0

Imagen 19 - Preferencias idénticas

Los individuos que aportan financiación al bien público son los individuos 2,3 y 4. Sus rentas son distintas (33,21 y 35 unidades monetarias). Sin embargo consumen la misma cantidad de bien privado (19,3 unidades monetarias) tal y como enuncia el teorema.

4.4.3.Teorema 6

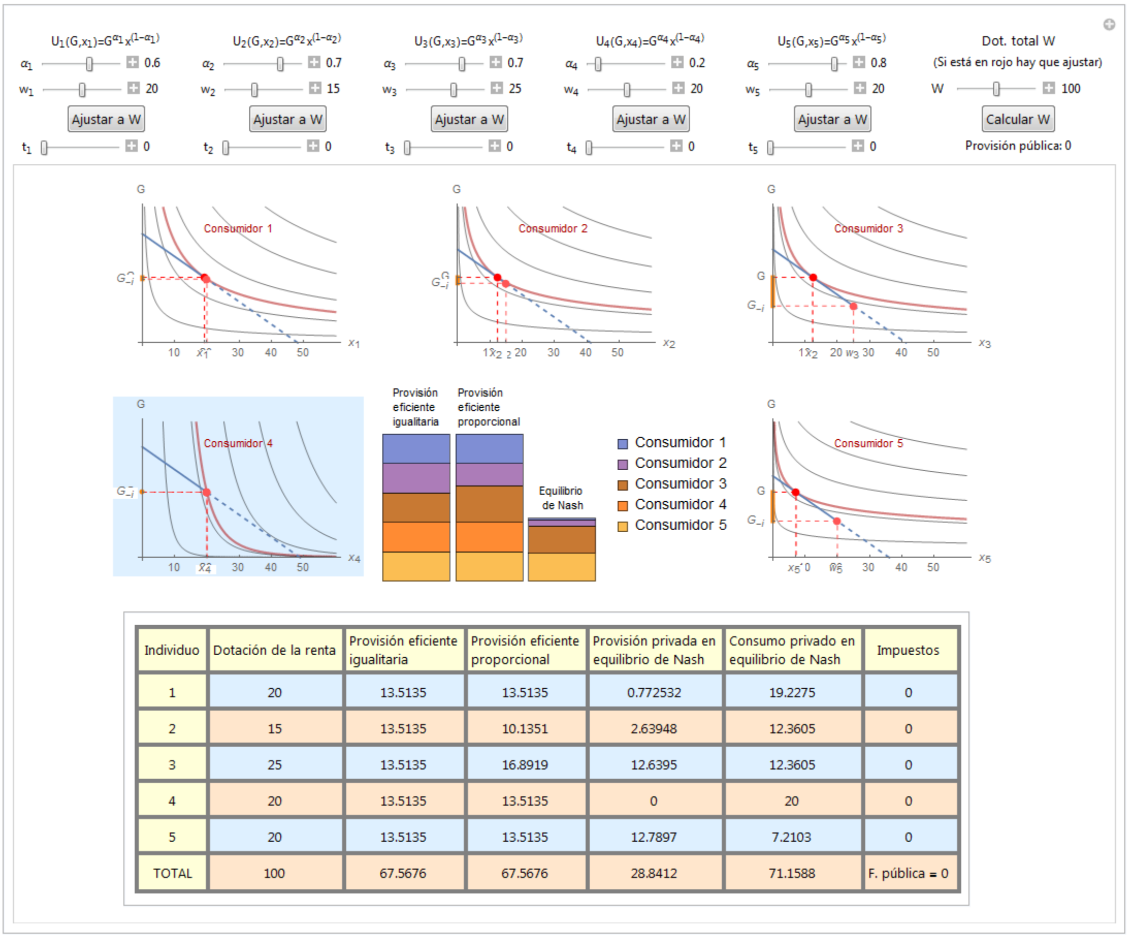
Partiendo de una posición inicial en la que los consumidores contribuyen voluntariamente a la provisión de un bien público, el gobierno financia parte del bien público, que paga mediante la imposición de impuestos. Entonces:

i. Si los impuestos recogidos de cada individuo no exceden su contribución voluntaria a la financiación del bien público en ausencia de provisión pública, entonces la contribución del gobierno resulta en una reducción similar en la cantidad de contribución privada. (crowding-out)

ii. Si el gobierno recoge parte de los impuestos de los consumidores no contribuyentes, entonces, aunque las contribuciones privadas podrían decrecer, la cantidad total de provisión de equilibrio aumentará.

iii. Si el gobierno recoge parte de los impuestos con los que financia el bien público, mediante una imposición a cualquier contribuyente, por una suma mayor a la cantidad de su contribución, la provisión total de equilibrio de bien público debe aumentar.

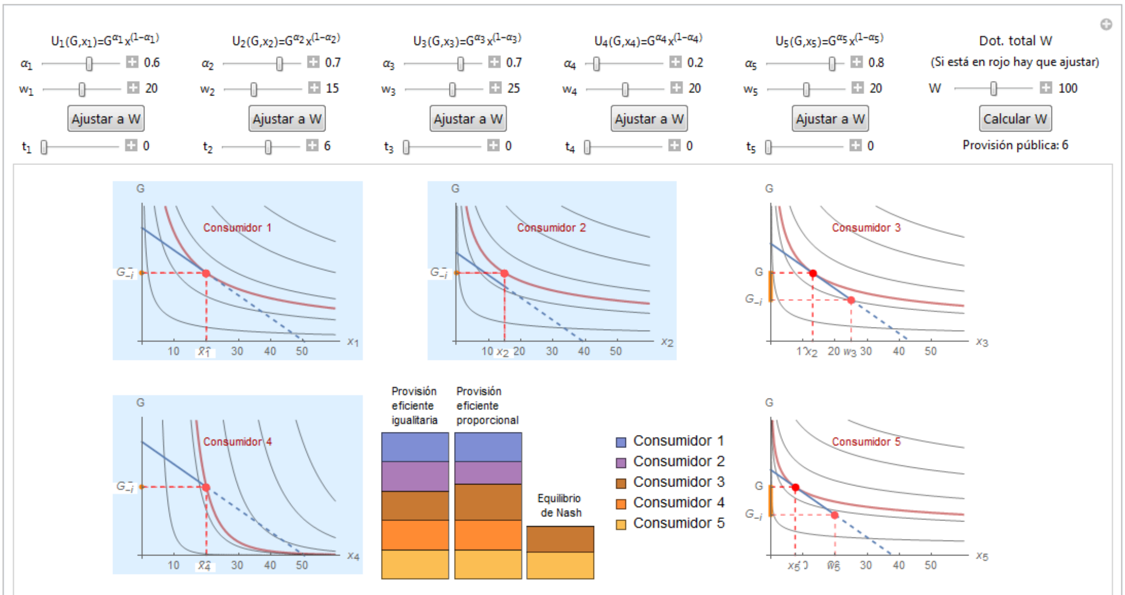
Elegimos ilustrar la tercera afirmación del teorema. Partiendo de otra situación anterior distinta (Imagen 20), se decide implantar un impuesto de 6 unidades monetarias al consumidor 2.



Individuo	Dotación de la renta	Provisión eficiente igualitaria	Provisión eficiente proporcional	Provisión privada en equilibrio de Nash	Consumo privado en equilibrio de Nash	Impuestos
1	20	13.5135	13.5135	0.772532	19.2275	0
2	15	13.5135	10.1351	2.63948	12.3605	0
3	25	13.5135	16.8919	12.6395	12.3605	0
4	20	13.5135	13.5135	0	20	0
5	20	13.5135	13.5135	12.7897	7.2103	0
TOTAL	100	67.5676	67.5676	28.8412	71.1588	F. pública = 0

Imagen 20

Como el impuesto es mayor que su contribución (que era 2,6 unidades monetarias), este individuo decide dejar de contribuir a la financiación de bienes públicos. Debido a que las decisiones de los consumidores están interconectadas, el individuo 1 también decide dejar de contribuir a la financiación de G.



Individuo	Dotación de la renta	Provisión eficiente igualitaria	Provisión eficiente proporcional	Provisión privada en equilibrio de Nash	Consumo privado en equilibrio de Nash	Impuestos
1	20	13.5135	13.5135	0	20	0
2	15	13.5135	10.1351	0	15	6
3	25	13.5135	16.8919	11.9787	13.0213	0
4	20	13.5135	13.5135	0	20	0
5	20	13.5135	13.5135	12.4043	7.59574	0
TOTAL	100	67.5676	67.5676	24.383	75.617	F. pública = 6

Imagen 21 – Impuestos de tanto alzado

Sin embargo, el valor de la provisión de bien público pasa a ser el valor de la provisión privada junto con el de la provisión pública del mismo, es decir 30,38 unidades monetarias; por 28.84 del caso anterior.

5. CONCLUSIONES

El análisis de un artículo con tal carga teórica y matemática como es BBV necesita de un amplio trabajo previo de contextualización tanto a nivel teórico como a nivel algebraico. Baste decir que para siquiera abordar el artículo, ha hecho falta desarrollar el concepto de eficiencia y el concepto de equilibrio de Nash, lo cual ha supuesto gran parte del desarrollo del trabajo.

La concreción de un modelo de esta complejidad a un ejemplo concreto como el de las preferencias Cobb-Douglas, en el que la notación y la terminología se puedan acercar a otros casos ya conocidos facilita en gran medida la comprensión de teoremas que llevan detrás de sí una gran nivel de abstracción.

El uso de Mathematica, una vez desarrollada la herramienta e incluido el modelo en cuestión, ha facilitado la aproximación intuitiva y la comprensión del artículo BBV. Se ha elegido ilustrar aquí solamente algunos de los teoremas del mismo, pero es fácil realizar un proceso análogo para cualquiera de los demás una vez la figura está disponible.

Hablando en términos más generales, con este trabajo ha quedado introducido el uso instrumental de la potencia gráfica y de cálculo de Wolfram Mathematica como herramienta de apoyo para la explicación, comprensión y desarrollo de modelos microeconómicos.

BIBLIOGRAFÍA

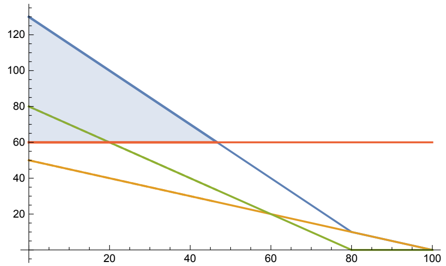
- Bergstrom T., Blume L. y Varian H.R., 1984-85, On the private provision of Public Goods, *University of Michigan – Journal of Public Economics* 29 (1986).
- Braña F.J., 2004, Teoría de los Bienes Públicos y Aplicaciones Prácticas.
- Kahneman D. y Knetsch J.L., 1992, Valuing Public Goods: The Purchase of Moral Satisfaction, Journal of Environmental Economics and Management 22, 57-70. Recuperado de: http://econweb.ucsd.edu/~jandreon/Publications/JPubE%202007%20BBV.pdf
- *Journal of Public Economics*, Vol 91, Iss 9, Pgs 1643-1874
- Mas Colell A. y Green J.R., 1995, Microeconomic Theory, Oxford University Press.
- Moliniari G., 1849, The production of Security.
- Musgrave Richard A., 1939, The voluntary exchange theory of Public Economy, Quarterly Journal of Economics. Vol 53-February.
- Musgrave Richard A., 1959, The Theory of Public Finance, version en castellano editada por Aguilar, Madrid (1968)
- Musgrave Richard A., 2002, Conference Speech. Two Anniversaries, 100 years. 90 years.
- Ostrom V. y Ostrom A., 2010, Workshop in Political Theory and Policy Analysis, Indiana University.
- Puértolas y Llorente, 2003, Microeconomía interactiva II, Pirámide.
- Pyndyck R.S. y Rubinfield D.L., 1988, Microeconomics, New York, Macmillan.
- Samuelson, Paul A. (1954), The Pure Theory of Public Expenditure. The Review of Economics and Statistics, Vol. 36, No. 4.
- Stiglitz, Joseph E., et al. (1998), La Economía Del Sector Público. 2ª ed. Antoni Bosch. Barcelona.
- Varian H.R., 1992, Microeconomic Analysis, Norton.
- Varian H.R., 1987, Intermediate Microeconomics: A Modern Approach, Norton.
- Wolfram Language & System Documentation Center - http://reference.wolfram.com/language/?source=nav

Anexo 1

SOLUCIÓN ESTÁTICA

En primer lugar generamos una solución estática para introducirnos en el manejo del programa y de sus funciones.

```
p1[q_] := Max[50 - 1 / 2 q, 0]
          máximo

p2[q_] := Max[80 - q, 0]
          máximo

Vmg[q_] := Max[p1[q] + p2[q], 0]
           máximo

Cmg[q_] := 60


Show[Plot[{Vmg[q], p1[q], p2[q], Cmg[q]},
mue·· representación gráfica
  {q, 0, 100}], ⋮⋮→{0,150},Filling→{1→{4}},RegionFunction→Function[q,q≤46.5]]]
                   relleno                 función de región   función
```



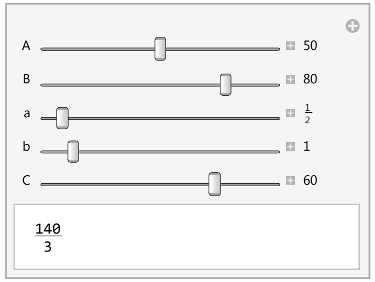
SOLUCIÓN DINÁMICA

A continuación introducimos el uso de la función "Manipulate" para generar soluciones dinámicas.

Reescribimos las funciones utilizando Máximos entre las mismas y el 0 para evitar los valores negativos, que pueden aparecer a nivel algebraico pero no tienen sentido económico.

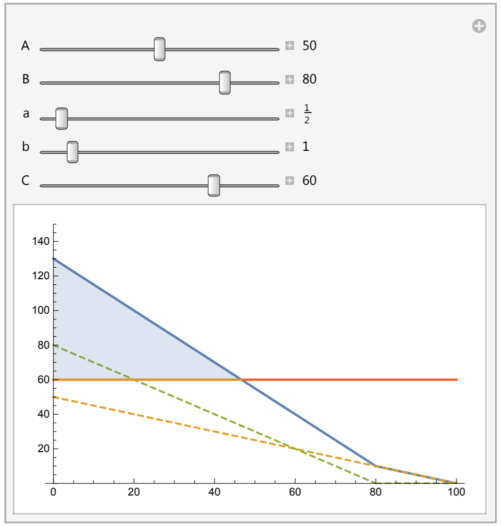
Para el sombreado necesitaremos calcular el punto de corte entre la función de valoración social marginal y el coste marginal (es decir, el punto eficiente).
En el Manipulate que vemos a continuación se introduce una función "Solve" que calcula el q eficiente. El Quiet[] es un comando que hace que lo que le metes dentro funcione sin dar mensajes, siempre que no sean graves. En este caso lo utilizamos porque con las funciones Max no le da para mostrar la solución ' exacta'


```
Manipulate[qo = q /. Quiet[Solve[Max[A - a * q, 0] + Max[B - b * q, 0] == c, q]][[1]],
manipula                silenc·· resue··· máximo        máximo
 {{A, 50, "A"}, 0, 100, Appearance → "Labeled"},
                        apariencia    etiquetado
 {{B, 80, "B"}, 0, 100, Appearance → "Labeled"},
                        apariencia    etiquetado
 {{a, (1 / 2), "a"}, 0, 10, Appearance → "Labeled"},
                            apariencia    etiquetado
 {{b, 1, "b"}, 0, 10, Appearance → "Labeled"},
                      apariencia    etiquetado
 {{c, 60, "C"}, 0, 80, Appearance → "Labeled"}]
   constante           apariencia    etiquetado
```



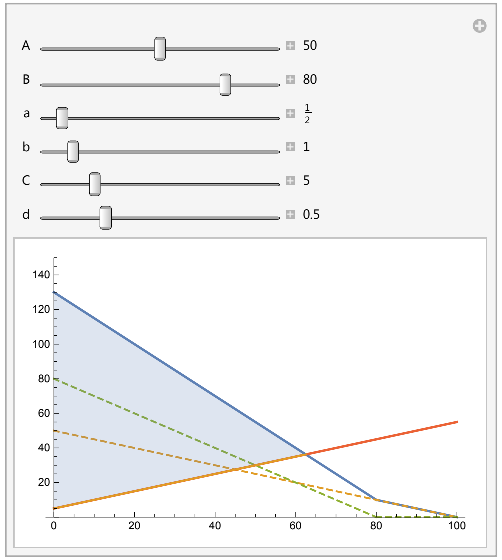
Se puede incorporar el Solve anterior dentro del Manipulate principal, para usarlo después en el RegionFunction (es decir, para el sombreado), o para dibujar el punto.

```
Manipulate[qo = q /. Quiet[Solve[Max[A - a * q, 0] + Max[B - b * q, 0] == c, q]][[1]];
manipula        silenc·· resue··· máximo        máximo
 Show[Plot[{Max[A - a * q, 0] + Max[B - b * q, 0], Max[A - a * q, 0], Max[B - b * q, 0], c},
 mue·· repre··· máximo         máximo             máximo             máximo
   {q, 0, 100}, PlotRange → {0, 150}, PlotStyle → {Thick, Dashed, Dashed}],
                rango de representación  estilo de repre··· grueso rayado rayado
  Plot[{Max[A - a * q, 0] + Max[B - b * q, 0], c}, {q, 0, 100}, PlotRange → {0, 150},
  repre··· máximo        máximo                                 rango de representación
   Filling → {1 → {2}}, RegionFunction → Function[q, q ≤ qo]]], {{A, 50, "A"}, 0,
   relleno              función de región  función
  100, Appearance → "Labeled"}, {{B, 80, "B"}, 0, 100, Appearance → "Labeled"},
       apariencia    etiquetado                      apariencia    etiquetado
 {{a, (1/2), "a"}, 0, 10, Appearance → "Labeled"}, {{b, 1, "b"}, 0, 10,
                          apariencia    etiquetado
  Appearance → "Labeled"}, {{c, 60, "C"}, 0, 80, Appearance → "Labeled"}]
  apariencia    etiquetado    constante          apariencia    etiquetado
```



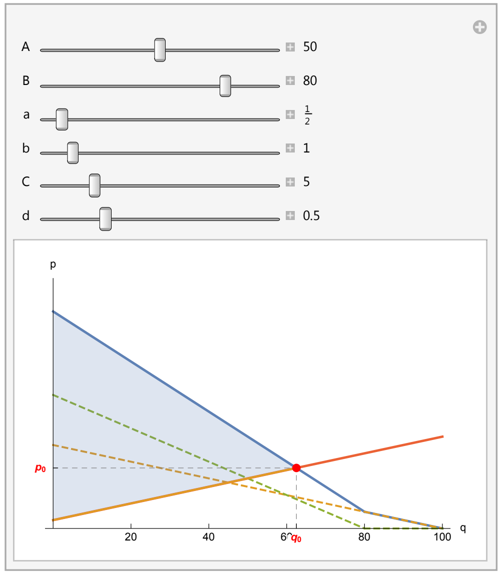
Aunque se usa muchas veces el coste marginal constante, cuesta poco incorporar el coste marginal creciente, dejando el caso anterior como caso particular con d=0


```
Manipulate[qo = q /. Quiet[Solve[Max[A - a * q, 0] + Max[B - b * q, 0] == c + d q, q]][[1]];
manipula        silenc·· resue··· máximo        máximo
 Show[Plot[{Max[A - a * q, 0] + Max[B - b * q, 0], Max[A - a * q, 0], Max[B - b * q, 0], c + d q},
 mue·· repre··· máximo         máximo             máximo             máximo
   {q, 0, 100}, PlotRange → {0, 150}, PlotStyle → {Thick, Dashed, Dashed}], Plot[
                rango de representación  estilo de repre··· grueso rayado rayado  representación gráfic
   {Max[A - a * q, 0] + Max[B - b * q, 0], c + d q}, {q, 0, 100}, PlotRange → {0, 150}, Filling →
    máximo        máximo                                            rango de representación  relleno
    {1 → {2}}, RegionFunction → Function[q, q ≤ qo]]], {{A, 50, "A"}, 0, 100, Appearance →
               función de región  función                                    apariencia
   "Labeled"}, {{B, 80, "B"}, 0, 100, Appearance → "Labeled"}, {{a, (1/2), "a"}, 0,
   etiquetado                         apariencia    etiquetado
  10, Appearance → "Labeled"}, {{b, 1, "b"}, 0, 10, Appearance → "Labeled"}, {{c, 5, "C"},
      apariencia    etiquetado                      apariencia    etiquetado    constant
  0, 25, Appearance → "Labeled"}, {{d, .5, "d"}, 0, 2, Appearance → "Labeled"}]
         apariencia    etiquetado                    apariencia    etiquetado
```



Finalmente, se puede añadir el punto usando Graphics.
También con Graphics se pueden añadir etiquetas. Además etiquetamos los ejes.

```
Manipulate[qo = q /. Quiet[Solve[Max[A - a * q, 0] + Max[B - b * q, 0] == c + d q, q]][[1]];
manipula                 silenc·· resue··· máximo           máximo
 Show[Plot[{Max[A - a * q, 0] + Max[B - b * q, 0], Max[A - a * q, 0], Max[B - b * q, 0], c + d q},
 mue·· repre··· máximo             máximo             máximo             máximo
   {q, 0, 100}, PlotRange → {0, 150}, PlotStyle → {Thick, Dashed, Dashed}, AxesLabel →
                rango de representación   estilo de repre··· grueso  rayado  rayado  etiqueta de ejes
    {"q", "p"}, Ticks → {{20, 40, 60, 80, 100, {qo, Style[" q0 ", Background → White,
                marcas                              estilo      fondo de imagen blanco
       Red, Bold]}}, {{c + d qo, Style[" p0 ", Background → White, Red, Bold]}}}],
       negrita             estilo         fondo de imagen blanco  rojo negrita
  Plot[{Max[A - a * q, 0] + Max[B - b * q, 0], c + d q}, {q, 0, 100}, PlotRange → {0, 150},
        máximo            máximo                                    rango de representación
   Filling → {1 → {2}}, RegionFunction → Function[q, q ≤ qo]],
                        función de región  función
  Graphics[{{Dashed, Gray, Line[{{qo, 0}, {qo, c + d qo}, {0, c + d qo}}]},
             rayado  gris  línea
    {Red, PointSize → Large, Point[{qo, c + d qo}]}}]],
     rojo tamaño de pu·· grande punto
 {{A, 50, "A"}, 0, 100, Appearance → "Labeled"},
                        apariencia    etiquetado
 {{B, 80, "B"}, 0, 100, Appearance → "Labeled"},
                        apariencia    etiquetado
 {{a, (1/2), "a"}, 0, 10, Appearance → "Labeled"},
                          apariencia    etiquetado
 {{b, 1, "b"}, 0, 10, Appearance → "Labeled"},
                      apariencia    etiquetado
 {{c, 5, "C"}, 0, 25, Appearance → "Labeled"},
  constante           apariencia    etiquetado
 {{d, .5, "d"}, 0, 2, Appearance → "Labeled"}]
                      apariencia    etiquetado
```

Anexo 2

Provisión eficiente del bien público. Dos individuos.

Tenemos dos individuos, con preferencias Cobb Douglas

$U_i[G, x_i] = G^{a_i} x_i^{1-a_i}$

y una dotación inicial de renta w_i

El dinero puede usarse para consumo privado, x_i, o como aportación al bien público, g_i. Cada individuo consume el total de bien público, $G = g_1 + g_2$

¿Cuál es la dotación eficiente de bien público en la economía?
Siguiendo a Varian (Análisis microeconómico, pág 492)
tras plantear la maximización de la suma ponderada de utilidades
llegamos como condición de eficiencia (en el sentido de Pareto) a

$RMS_1(G, x_1) + RMS_2(G, x_2) = 1$

```
u1[G_, x1_] = x1^(1 - a1) G^a1
```

$G^{a1}\, x1^{1-a1}$

```
u2[G_, x2_] = x2^(1 - a2) G^a2
```

$G^{a2}\, x2^{1-a2}$

```
rms1[G_, x1_] = D[u1[G, x1], G] / D[u1[G, x1], x1]
                deriva             deriva
```

$$\frac{a1\, x1}{(1-a1)\, G}$$

```
rms2[ G_, x2_] = D[u2[G, x2], G] / D[u2[G, x2], x2]
                 deriva             deriva
```

$$\frac{a2\, x2}{(1-a2)\, G}$$

Tenemos pues la ecuación

```
rms1[G, x1] + rms2[G, x2] == 1
```

$$\frac{a1\, x1}{(1-a1)\, G} + \frac{a2\, x2}{(1-a2)\, G} == 1$$

Y además sabemos que se cumple

```
G + x1 + x2 == w1 + w2
```

$G + x1 + x2 == w1 + w2$

```
Solve[{rms1[G, x1] + rms2[G, x2] == 1, G + x1 + x2 == w1 + w2}, {G, x1}]
resuelve
```

$$\left\{\left\{G \to -\frac{a1\,w1 - a1\,a2\,w1 + a1\,w2 - a1\,a2\,w2 - a1\,x2 + a2\,x2}{-1 + a2},\right.\right.$$
$$\left.\left. x1 \to -\frac{1}{-1 + a2}(w1 - a1\,w1 - a2\,w1 + a1\,a2\,w1 + w2 - a1\,w2 - a2\,w2 + a1\,a2\,w2 - x2 + a1\,x2)\right\}\right\}$$

Hay múltiples puntos eficientes (G, x1, x2)

Podemos plantear dos alternativas en lo que se refiere a la financiación: Que aporten a partes iguales para sufragar el bien público, o que aporten en proprción a su dotación wi

g1 = g2 implica que w1 - x1 == w2 - x2

```
Solve[{rms1[G, x1] + rms2[G, x2] == 1, G + x1 + x2 == w1 + w2, w1 - x1 == w2 - x2}, {G, x1, x2}]
resuelve
```

$$\left\{\left\{G \to \frac{2\,(-a1\,w1 + a1\,a2\,w1 - a2\,w2 + a1\,a2\,w2)}{-2 + a1 + a2},\right.\right.$$
$$x1 \to -\frac{2\,w1 - 2\,a1\,w1 - a2\,w1 + a1\,a2\,w1 - a2\,w2 + a1\,a2\,w2}{-2 + a1 + a2},$$
$$\left.\left. x2 \to -\frac{-a1\,w1 + a1\,a2\,w1 + 2\,w2 - a1\,w2 - 2\,a2\,w2 + a1\,a2\,w2}{-2 + a1 + a2}\right\}\right\}$$

Una comprobación

```
Simplify[
simplifica
```

$$\frac{2\,(-a1\,w1 + a1\,a2\,w1 - a2\,w2 + a1\,a2\,w2)}{-2 + a1 + a2} - \frac{2\,w1 - 2\,a1\,w1 - a2\,w1 + a1\,a2\,w1 - a2\,w2 + a1\,a2\,w2}{-2 + a1 + a2} - \frac{-a1\,w1 + a1\,a2\,w1 + 2\,w2 - a1\,w2 - 2\,a2\,w2 + a1\,a2\,w2}{-2 + a1 + a2}]$$

$w1 + w2$

g1/w1=g2/w2 implica que (w1-x1)/w1 = (w2-x2)/w2 y de ahí llegamos a x1/w1 = x2/w2

```
Solve[{rms1[G, x1] + rms2[G, x2] == 1, G + x1 + x2 == w1 + w2, x1 / w1 == x2 / w2}, {G, x1, x2}]
resuelve
```

$$\left\{\left\{G \to \frac{(w1 + w2)\,(-a1\,w1 + a1\,a2\,w1 - a2\,w2 + a1\,a2\,w2)}{-w1 + a2\,w1 - w2 + a1\,w2},\right.\right.$$
$$\left.\left. x1 \to -\frac{(1 - a1 - a2 + a1\,a2)\,w1\,(w1 + w2)}{-w1 + a2\,w1 - w2 + a1\,w2},\ x2 \to -\frac{(1 - a1 - a2 + a1\,a2)\,w2\,(w1 + w2)}{-w1 + a2\,w1 - w2 + a1\,w2}\right\}\right\}$$

```
Simplify[
simplifica
```

$$\frac{(w1 + w2)\,(-a1\,w1 + a1\,a2\,w1 - a2\,w2 + a1\,a2\,w2)}{-w1 + a2\,w1 - w2 + a1\,w2} - \frac{(1 - a1 - a2 + a1\,a2)\,w1\,(w1 + w2)}{-w1 + a2\,w1 - w2 + a1\,w2} - \frac{(1 - a1 - a2 + a1\,a2)\,w2\,(w1 + w2)}{-w1 + a2\,w1 - w2 + a1\,w2}]$$

$w1 + w2$

¿Y para más individuos?

La condición de que para la eficiencia se debe cumplir que la suma de las RMS se generaliza sin problemas **

Basta pues definir las funciones para los demás individuos y repetir el esquema anterior

```
u3[G_, x3_] = x3^(1 - a3) G^a3
```

$G^{a3}\, x3^{1-a3}$

```
u4[G_, x4_] = x4^(1 - a4) G^a4
```

$G^{a4}\, x4^{1-a4}$

```
u5[G_, x5_] = x5^(1 - a5) G^a5
```

$G^{a5}\, x5^{1-a5}$

```
rms3[G_, x3_] = D[u3[G, x3], G] / D[u3[G, x3], x3]
                deriva              deriva
```

$\frac{a3\ x3}{(1 - a3)\ G}$

```
rms4[G_, x4_] = D[u4[G, x4], G] / D[u4[G, x4], x4]
                deriva              deriva
```

$\frac{a4\ x4}{(1 - a4)\ G}$

```
rms5[G_, x5_] = D[u5[G, x5], G] / D[u5[G, x5], x5]
                deriva              deriva
```

$\frac{a5\ x5}{(1 - a5)\ G}$

Con aportación igualitaria

```
Simplify[Solve[{rms1[G, x1] + rms2[G, x2] + rms3[G, x3] + rms4[G, x4] + rms5[G, x5] == 1,
simplifica  resuelve
   G + x1 + x2 + x3 + x4 + x5 == w1 + w2 + w3 + w4 + w5,
   w1 - x1 == w2 - x2 == w3 - x3 == w4 - x4 == w5 - x5}, {G, x1, x2, x3, x4, x5}]]
```

```
{{G →
   (5 (a3 w3 - a3 a4 w3 - a3 a5 w3 + a3 a4 a5 w3 + a4 w4 - a3 a4 w4 - a4 a5 w4 + a3 a4 a5 w4 + a5 w5 - a3
        a5 w5 - a4 a5 w5 + a3 a4 a5 w5 + a2 (-(-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 - a4 w4 + a4 a5 w4 -
          a5 w5 + a4 a5 w5 + a3 ((-1 + a4 + a5 - a4 a5) w3 + a5 w5 + a4 (w4 - a5 w4 - a5 w5))) +
       a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 - a3 w3 + a3 a4 w3 + a3 a5 w3 -
          a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + a4 a5 w4 - a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4 a5 w5 -
          a3 a4 a5 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 -
             a4 a5 w5 + a3 ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + a4 (-1 + a5) w4 - a5 w5 + a4 a5 w5))))) /
    (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
      a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
      a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 -
         2 a4 a5 + a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))),
  x1 → -(((-1 + a1) ((5 - 4 a4 - 4 a5 + 3 a4 a5 + a3 (-4 + 3 a4 + 3 a5 - 2 a4 a5) +
              a2 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5)) w1 - a3 w3 + a3 a4 w3 +
          a3 a5 w3 - a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + a4 a5 w4 - a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 +
          a4 a5 w5 - a3 a4 a5 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 -
             a4 a5 w5 + a3 ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + a4 (-1 + a5) w4 - a5 w5 + a4 a5 w5)))) /
      (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
        a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
        a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
           a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5))))),
  x2 → -(((-1 + a2) ((5 - 4 a5 + a4 (-4 + 3 a5) + a3 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + 3 a5)) w2 -
          a3 w3 + a3 a4 w3 + a3 a5 w3 - a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 +
          a4 a5 w4 - a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4 a5 w5 - a3 a4 a5 w5 +
          a1 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) +
                3 a5 - 2 a4 a5) w2 + a3 w3 - a3 a4 w3 - a3 a5 w3 + a3 a4 a5 w3 + a4 w4 - a3 a4 w4 -
             a4 a5 w4 + a3 a4 a5 w4 + a5 w5 - a3 a5 w5 - a4 a5 w5 + a3 a4 a5 w5))) /
      (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
        a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
```



```
        a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
           a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5))))),
  x3 → -(((-1 + a3) (5 w3 - 4 a4 w3 - 4 a5 w3 + 3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a4 a5 w4 - a5 w5 + a4 a5 w5 +
          a2 ((-1 + a4 + a5 - a4 a5) w2 + (-4 + 3 a4 + 3 a5 - 2 a4 a5) w3 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 -
             a4 a5 w5) + a1 ((-1 + a2) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 - 4 w3 + 3 a4 w3 + 3 a5 w3 -
             2 a4 a5 w3 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 - a4 a5 w5 + a2 ((-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
                (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) w3 - a4 w4 + a4 a5 w4 - a5 w5 + a4 a5 w5)))) /
      (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
        a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
        a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
           a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5))))),
  x4 → -(((-1 + a4) (-a3 w3 + a3 a5 w3 + 5 w4 - 4 a3 w4 - 4 a5 w4 + 3 a3 a5 w4 -
          a5 w5 + a3 a5 w5 + a2 ((-1 + a3 + a5 - a3 a5) w2 - 4 w4 +
             3 a5 w4 + a5 w5 + a3 (w3 - a5 w3 + 3 w4 - 2 a5 w4 - a5 w5)) +
          a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a5) w1 + a3 w3 - a3 a5 w3 - 4 w4 + 3 a3 w4 +
             3 a5 w4 - 2 a3 a5 w4 + a5 w5 - a3 a5 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a5) w2 + 3 w4 -
                2 a5 w4 - a5 w5 + a3 ((-1 + a5) w3 + (-2 + a5) w4 + a5 w5))))) /
      (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
        a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
        a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
           a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5))))),
  x5 → -(((-1 + a5) (-a3 w3 + a3 a4 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + 5 w5 - 4 a3 w5 - 4 a4 w5 +
          3 a3 a4 w5 + a2 ((-1 + a3 + a4 - a3 a4) w2 + a4 w4 - 4 w5 +
             3 a4 w5 + a3 (w3 - a4 w3 + 3 w5 - a4 (w4 + 2 w5))) +
          a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) w1 + a3 w3 - a3 a4 w3 + a4 w4 - a3 a4 w4 -
             4 w5 + 3 a3 w5 + 3 a4 w5 - 2 a3 a4 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) w2 -
                a4 w4 + 3 w5 - 2 a4 w5 + a3 ((-1 + a4) w3 - 2 w5 + a4 (w4 + w5)))))) /
      (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
        a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
        a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
           a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))))}}
```

Aquí se repite el Solve de antes, pero ahora se crean las funciones de Dotación óptima y consumos privados con aportación igualitaria.

```
Solve[{rms1[G, x1] + rms2[G, x2] + rms3[G, x3] + rms4[G, x4] + rms5[G, x5] == 1,
resuelve
   G + x1 + x2 + x3 + x4 + x5 == w1 + w2 + w3 + w4 + w5,
   w1 - x1 == w2 - x2 == w3 - x3 == w4 - x4 == w5 - x5}, {G, x1, x2, x3, x4, x5}];
Gefieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = G /. %[[1]];
x1efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = x1 /. %%[[1]];
x2efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = x2 /. %%%[[1]];
x3efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = x3 /. %%%%[[1]];
x4efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = x4 /. %%%%%[[1]];
x5efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = x5 /. %%%%%%[[1]];
```

Con aportación proporcional a la renta

```
Simplify[Solve[{rms1[G, x1] + rms2[G, x2] + rms3[G, x3] + rms4[G, x4] + rms5[G, x5] == 1,
simplifica  resuelve
    G + x1 + x2 + x3 + x4 + x5 == w1 + w2 + w3 + w4 + w5,
    x1 / w1 == x2 / w2 == x3 / w3 == x4 / w4 == x5 / w5}, {G, x1, x2, x3, x4, x5}]]
{{G → ((w1 + w2 + w3 + w4 + w5)
      (a3 w3 - a3 a4 w3 - a3 a5 w3 + a3 a4 a5 w3 + a4 w4 - a3 a4 w4 - a4 a5 w4 + a3 a4 a5 w4 + a5 w5 - a3
        a5 w5 - a4 a5 w5 + a3 a4 a5 w5 + a2 (-(-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 - a4 w4 + a4 a5 w4 -
          a5 w5 + a4 a5 w5 + a3 ((-1 + a4 + a5 - a4 a5) w3 + a5 w5 + a4 (w4 - a5 w4 - a5 w5))) +
       a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 - a3 w3 + a3 a4 w3 + a3 a5 w3 -
          a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + a4 a5 w4 - a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4 a5 w5 -
          a3 a4 a5 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 -
             a4 a5 w5 + a3 ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + a4 (-1 + a5) w4 - a5 w5 + a4 a5 w5))))) /
   ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
       (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))),
  x1 → -(((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
     ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
          (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5))))),
  x2 → -(((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
     ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
          (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5))))),
  x3 → -(((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w3 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
     ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
          (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5))))),
  x4 → -(((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w4 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
     ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
          (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5))))),
  x5 → -(((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w5 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
     ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
          (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))))}}
```

Se definen las funciones para niveles eficientes con aportación proporcional a la renta

```
Solve[{rms1[G, x1] + rms2[G, x2] + rms3[G, x3] + rms4[G, x4] + rms5[G, x5] == 1,
resuelve
   G + x1 + x2 + x3 + x4 + x5 == w1 + w2 + w3 + w4 + w5,
   x1 / w1 == x2 / w2 == x3 / w3 == x4 / w4 == x5 / w5}, {G, x1, x2, x3, x4, x5}];
Gefiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = G /. %[[1]];
x1efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = x1 /. %%[[1]];
x2efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = x2 /. %%%[[1]];
x3efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = x3 /. %%%%[[1]];
x4efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = x4 /. %%%%%[[1]];
x5efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] = x5 /. %%%%%%[[1]];
```

El manipulate muestra en dos columnas la provisión óptima y los consumos privados para aportación igualitaria y para aportación proporcional.

```
Manipulate[Row[{Column[{Gefieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
manipula    fila  columna
      w1 - x1efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
      w2 - x2efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
      w3 - x3efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
      w4 - x4efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
      w5 - x5efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5]}],
```

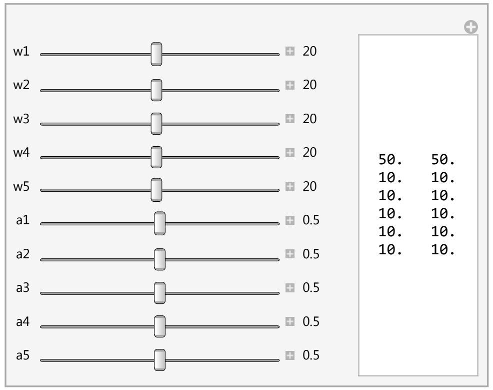


```
   "  ",
   Column[{Gefiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
   columna
     w1 - x1efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     w2 - x2efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     w3 - x3efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     w4 - x4efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     w5 - x5efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5]}]}],
{{w1, 20}, 1, 40, Appearance → "Labeled"}, {{w2, 20}, 1, 40, Appearance → "Labeled"},
                  apariencia    etiquetado                    apariencia    etiquetado
{{w3, 20}, 1, 40, Appearance → "Labeled"}, {{w4, 20}, 1, 40, Appearance → "Labeled"},
                  apariencia    etiquetado                    apariencia    etiquetado
{{w5, 20}, 1, 40, Appearance → "Labeled"},
                  apariencia    etiquetado
{{a1, .5}, .1, .9, Appearance → "Labeled"},
                   apariencia    etiquetado
{{a2, .5}, .1, .9, Appearance → "Labeled"},
                   apariencia    etiquetado
{{a3, .5}, .1, .9, Appearance → "Labeled"},
                   apariencia    etiquetado
{{a4, .5}, .1, .9, Appearance → "Labeled"},
                   apariencia    etiquetado
{{a5, .5}, .1, .9, Appearance → "Labeled"},
                   apariencia    etiquetado
Initialization :→ (Gefieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
inicialización
   (5 (a3 w3 - a3 a4 w3 - a3 a5 w3 + a3 a4 a5 w3 + a4 w4 - a3 a4 w4 -
         a4 a5 w4 + a3 a4 a5 w4 + a5 w5 - a3 a5 w5 - a4 a5 w5 + a3 a4 a5 w5 +
         a2 (-(-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 - a4 w4 + a4 a5 w4 - a5 w5 + a4 a5 w5 +
            a3 ((-1 + a4 + a5 - a4 a5) w3 + a5 w5 + a4 (w4 - a5 w4 - a5 w5))) +
         a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 - a3 w3 + a3 a4 w3 + a3 a5 w3 -
            a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + a4 a5 w4 - a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4 a5 w5 -
            a3 a4 a5 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 - a4 a5
                w5 + a3 ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + a4 (-1 + a5) w4 - a5 w5 + a4 a5 w5))))) /
    (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
      a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
      a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
          a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5))));
  x1efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
   -(((-1 + a1) ((5 - 4 a4 - 4 a5 + 3 a4 a5 + a3 (-4 + 3 a4 + 3 a5 - 2 a4 a5) +
               a2 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5)) w1 - a3 w3 + a3 a4 w3 +
            a3 a5 w3 - a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + a4 a5 w4 - a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4
             a5 w5 - a3 a4 a5 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 -
               a4 a5 w5 + a3 ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + a4 (-1 + a5) w4 - a5 w5 + a4 a5 w5)))) /
      (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
        a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
        a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
            a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))));
  x2efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
   -(((-1 + a2) ((5 - 4 a5 + a4 (-4 + 3 a5) + a3 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + 3 a5)) w2 -
            a3 w3 + a3 a4 w3 + a3 a5 w3 - a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 +
            a4 a5 w4 - a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4 a5 w5 - a3 a4 a5 w5 +
            a1 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) +
```

```
              3 a5 - 2 a4 a5) w2 + a3 w3 - a3 a4 w3 - a3 a5 w3 + a3 a4 a5 w3 + a4 w4 - a3 a4 w4 -
            a4 a5 w4 + a3 a4 a5 w4 + a5 w5 - a3 a5 w5 - a4 a5 w5 + a3 a4 a5 w5))) /
    (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
      a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
      a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
         a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))));
x3efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 -(((-1 + a3) (5 w3 - 4 a4 w3 - 4 a5 w3 + 3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a4 a5 w4 - a5 w5 + a4 a5 w5 +
        a2 ((-1 + a4 + a5 - a4 a5) w2 + (-4 + 3 a4 + 3 a5 - 2 a4 a5) w3 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 -
           a4 a5 w5) + a1 ((-1 + a2) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 - 4 w3 + 3 a4 w3 + 3 a5 w3 -
           2 a4 a5 w3 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 - a4 a5 w5 + a2 ((-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
              (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) w3 - a4 w4 + a4 a5 w4 - a5 w5 + a4 a5 w5)))) /
    (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
      a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
      a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
         a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))));
x4efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 -(((-1 + a4) (-a3 w3 + a3 a5 w3 + 5 w4 - 4 a3 w4 - 4 a5 w4 + 3 a3 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 +
        a2 ((-1 + a3 + a5 - a3 a5) w2 - 4 w4 + 3 a5 w4 + a5 w5 + a3 (w3 - a5 w3 + 3 w4 - 2 a5 w4 -
              a5 w5)) + a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a5) w1 + a3 w3 - a3 a5 w3 - 4 w4 +
           3 a3 w4 + 3 a5 w4 - 2 a3 a5 w4 + a5 w5 - a3 a5 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a5) w2 +
              3 w4 - 2 a5 w4 - a5 w5 + a3 ((-1 + a5) w3 + (-2 + a5) w4 + a5 w5))))) /
    (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
      a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
      a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
         a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))));
x5efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 -(((-1 + a5) (-a3 w3 + a3 a4 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + 5 w5 - 4 a3 w5 - 4 a4 w5 + 3 a3 a4 w5 +
        a2 ((-1 + a3 + a4 - a3 a4) w2 + a4 w4 - 4 w5 + 3 a4 w5 + a3 (w3 - a4 w3 + 3 w5 -
              a4 (w4 + 2 w5))) + a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) w1 + a3 w3 - a3 a4 w3 +
           a4 w4 - a3 a4 w4 - 4 w5 + 3 a3 w5 + 3 a4 w5 - 2 a3 a4 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) w2 -
              a4 w4 + 3 w5 - 2 a4 w5 + a3 ((-1 + a4) w3 - 2 w5 + a4 (w4 + w5)))))) /
    (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 + a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) +
         a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) + a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) +
         3 a5 - 2 a4 a5 + a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))));
Gefiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 ((w1 + w2 + w3 + w4 + w5) (a3 w3 - a3 a4 w3 - a3 a5 w3 + a3 a4 a5 w3 + a4 w4 -
      a3 a4 w4 - a4 a5 w4 + a3 a4 a5 w4 + a5 w5 - a3 a5 w5 - a4 a5 w5 + a3 a4 a5 w5 +
      a2 (-(-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 - a4 w4 + a4 a5 w4 - a5 w5 + a4 a5 w5 +
         a3 ((-1 + a4 + a5 - a4 a5) w3 + a5 w5 + a4 (w4 - a5 w4 - a5 w5))) +
      a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 - a3 w3 + a3 a4 w3 + a3 a5 w3 -
         a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + a4 a5 w4 - a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4 a5 w5 -
         a3 a4 a5 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 - a4 a5
              w5 + a3 ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + a4 (-1 + a5) w4 - a5 w5 + a4 a5 w5))))) /
   ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
       (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5))));
x1efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 -(((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
    ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 +
      (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
         (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))));
```



```
  x2efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
   -(((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
      ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 +
        (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
           (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))));
  x3efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
   -(((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w3 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
      ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 +
        (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
           (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))));
  x4efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
   -(((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w4 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
      ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 +
        (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
           (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))));
  x5efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
   -(((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w5 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
      ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 +
        (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
           (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))));
 ),
Bookmarks -> {"primero" :> {a1 = 0.5, a2 = 0.76, a3 = 0.63,
marcalibros
    a4 = 0.20, a5 = 0.5`, w1 = 20, w2 = 12.95, w3 = 23.40, w4 = 23.75, w5 = 20}}]
```



Anexo 3
Provisión privada de un bien público y equilibrio de Nash. Dos individuos.

Tenemos dos individuos,con preferencias Cobb Douglas
$U_i[G, x_i] = G^{a_i} x_i^{1-a_i}$
y una dotación inicial de renta w_i
El dinero puede usarse para consumo privado, x_i, o como aportación al bien público, g_i. Cada individuo consume el total de bien público, $G = g_1 + g_2$
¿Cuál es el resultado de la provisión privada de un bien público en la economía?

De acuerdo con el desarrollo de la provisión privada de un bien público continuo de Varian (Análisis microeconómico, pág 494) planteamos un problema de maximización con restricciones.
En primer lugar definimos las funciones de utilidad:

```
U1[x1_, g1_ + g2_] = x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1
```

$(g1 + g2)^{a1}\, x1^{1-a1}$

```
U1[x1_, g1_, g2_] = x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1
U2[x2_, g1_, g2_] = x2^a1 * (g1 + g2)^(1 - a1)
```

$(g1 + g2)^{1-a1}\, x2^{a1}$

La restricción viene dada por la siguiente igualdad:

```
x1 + g1 == w1
```

`g1 + x1 == w1`

Planteamos el Lagrangiano, hallamos las derivadas parciales del mismo, y resolvemos el sistema mediante igualación:

```
L1[x1_, g1_, l_] = x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1 - l (x1 + g1 - w1)
```

$(g1 + g2)^{a1}\, x1^{1-a1} - l\,(g1 - w1 + x1)$

```
D[x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1 - l (x1 + g1 - w1), x1]
deriva
```

$-l + (1 - a1)\,(g1 + g2)^{a1}\, x1^{-a1}$

```
D[x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1 - l (x1 + g1 - w1), g1]
deriva
```

$-l + a1\,(g1 + g2)^{-1+a1}\, x1^{1-a1}$

```
D[x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1 - l (x1 + g1 - w1), l]
deriva
```

$-g1 + w1 - x1$

Al utilizar Solve para resolver el sistema de 3 ecuaciones vemos que el programa detecta una

inconsistencia en la solución.

```
Solve[{D[x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1 - l (x1 + g1 - w1), x1] == 0,
resuelve deriva
  D[x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1 - l (x1 + g1 - w1), g1] == 0,
  deriva
  D[x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1 - l (x1 + g1 - w1), l] == 0}, {x1, g1}]
  deriva
```

Solve: Inconsistent or redundant transcendental equation. After reduction, the bad equation is $-g1 + w1 - x1 == 0$.

Solve: Inconsistent or redundant transcendental equation. After reduction, the bad equation is
$-(1 - a1)^{\frac{1}{a1}}(g1 + g2) + g2\, l^{\frac{1}{a1}} - (g1 + g2)\, l^{\frac{1}{a1}} + l^{\frac{1}{a1}}\, w1 == 0.$

$$\left\{\left\{x1 \to \frac{(1 - a1)^{\frac{1}{a1}}(g2 + w1)}{(1 - a1)^{\frac{1}{a1}} + l^{\frac{1}{a1}}},\ g1 \to -\frac{(1 - a1)^{\frac{1}{a1}}\, g2 - l^{\frac{1}{a1}}\, w1}{(1 - a1)^{\frac{1}{a1}} + l^{\frac{1}{a1}}}\right\}\right\}$$

Por tanto, igualamos las dos primeras derivadas parciales, y dejamos la tercera en igualdad a 0. (es lo mismo a nivel matemático pero el programa consigue la solución deseada). También utilizamos Simplify para que nos dé la solución de la forma más reducida posible:

```
Simplify[Solve[{D[x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1 - l (x1 + g1 - w1), x1] ==
simplifica resuelve deriva
    D[x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1 - l (x1 + g1 - w1), g1],
    deriva
   D[x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1 - l (x1 + g1 - w1), l] == 0}, {x1, g1}]]
   deriva
```

$\{\{x1 \to -(-1 + a1)\,(g2 + w1),\ g1 \to (-1 + a1)\, g2 + a1\, w1\}\}$

Las soluciones obtenidas son x1 y g1 en función de otros parámetros. La primera solución es la demanda de bien privado 1, y la segunda es la función de reacción del individuo 1. Vemos cómo g1 queda expresado en función de la riqueza del individuo 1, pero también de la aportación del individuo 2 a la financiación de G.

Podemos realizar el mismo proceso para el individuo 2 y también obtendremos su demanda de bien privado y su función de reacción.

```
L[x2_, g2_, l_] = x2^(1 - a2) * (g1 + g2)^a2 - l (x2 + g2 - w2)
```

$(g1 + g2)^{a2}\, x2^{1-a2} - l\,(g2 - w2 + x2)$

```
Simplify[Solve[{D[x2^(1 - a2) * (g1 + g2)^a2 - l * (x2 + g2 - w2), x2] ==
simplifica resuelve deriva
    D[x2^(1 - a2) * (g1 + g2)^a2 - l (x2 + g2 - w2), g2],
    deriva
   D[x2^(1 - a2) * (g1 + g2)^a2 - l (x2 + g2 - w2), l] == 0}, {x2, g2}]]
   deriva
```

$\{\{x2 \to -(-1 + a2)\,(g1 + w2),\ g2 \to (-1 + a2)\, g1 + a2\, w2\}\}$

Como hemos visto en el desarrollo teórico, aquel punto que pertenezca a ambas funciones de reacción será el equilibrio de Nash. Por tanto, planteamos un sistema de ecuaciones entre ambas, para hallar la intersección.

```
Solve[{g1 == (-1 + a1) g2 + a1 w1, g2 == (-1 + a2) g1 + a2 w2}, {g1, g2}]
resuelve
```

$$\left\{\left\{g1 \to -\frac{a1\,w1 - a2\,w2 + a1\,a2\,w2}{-a1 - a2 + a1\,a2},\ g2 \to -\frac{-a1\,w1 + a1\,a2\,w1 + a2\,w2}{-a1 - a2 + a1\,a2}\right\}\right\}$$

En este punto surge otro problema. Dependiendo de los valores de los parámetros, estas funciones pueden dar como resultado aportaciones negativas, lo cual no tiene sentido. Esto funciona bien cuando el equilibrio es interior, pero no para soluciones de esquina.

Hacer una discusión sobre las posibilidades matemáticas es muy complicado. Dejaremos la resolución de esta cuestión para más adelante, mediante la representación gráfica.

El nivel final de bien público existente en la economía será la suma de las aportaciones de ambos individuos a su financiación, es decir, la suma de g1 y g2. Por tanto:

```
Simplify[Solve[G == - (a1 w1 - a2 w2 + a1 a2 w2)/(- a1 - a2 + a1 a2) + - (- a1 w1 + a1 a2 w1 + a2 w2)/(- a1 - a2 + a1 a2), G]]
simplifica  resuelve
```

$$\left\{\left\{G \to \frac{a1\,a2\,(w1 + w2)}{a1 + a2 - a1\,a2}\right\}\right\}$$

A pesar de que los resultados pueden parecer complejos, vemos que la suma de las aportaciones, junto con sus correspondientes consumos privados es igual a la dotación total de renta:

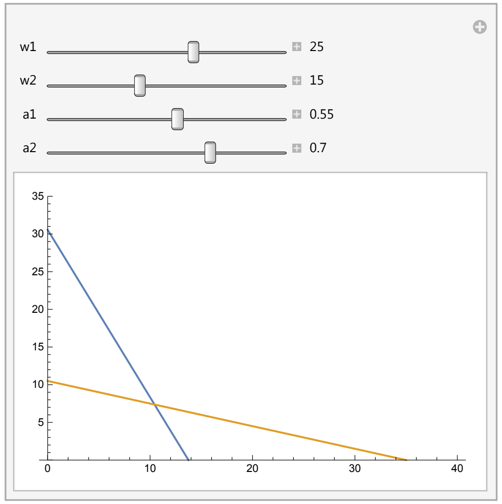
```
Simplify[(a1 a2 (w1 + w2))/(a1 + a2 - a1 a2) - (-1 + a1) (- (- a1 w1 + a1 a2 w1 + a2 w2)/(- a1 - a2 + a1 a2) + w1) -
simplifica
  (-1 + a2) (- (a1 w1 - a2 w2 + a1 a2 w2)/(- a1 - a2 + a1 a2) + w2)]
```

$w1 + w2$

Solución gráfica

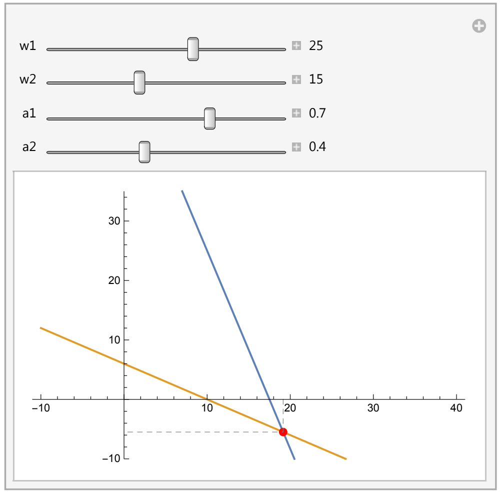
Las funciones de reacción son funciones lineales en las que solo intervienen las variables g1 y g2, por lo que su representación gráfica es sencilla. Lo hacemos a través del uso del comando Plot. Para ello reescribimos la función de reacción del individuo 1 de manera que g1 sea en ambas funciones de reacción la variable independiente, y g2 la dependiente. Así, para el individuo 2, $g_2 = w_2\alpha_2 - (1-\alpha_2) g_1$; y para el individuo 1 $g_2 = \frac{w_1\,\alpha_1 - g_1}{1-\alpha_1}$


```
Manipulate[Plot[{(w1 * a1 - g1) / (1 - a1), w2 * a2 - (1 - a2) * g1}, {g1, 0, 40},
manipula   representación gráfica
  PlotRange → {0, 35}], {{w1, 25, "w1"}, 0, 40, Appearance → "Labeled"},
  rango de representación                       apariencia     etiquetado
 {{w2, 15, "w2"}, 0, 40, Appearance → "Labeled"},
                         apariencia     etiquetado
 {{a1, 0.55, "a1"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"},
                          apariencia     etiquetado
 {{a2, 0.7, "a2"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"}]
                         apariencia     etiquetado
```



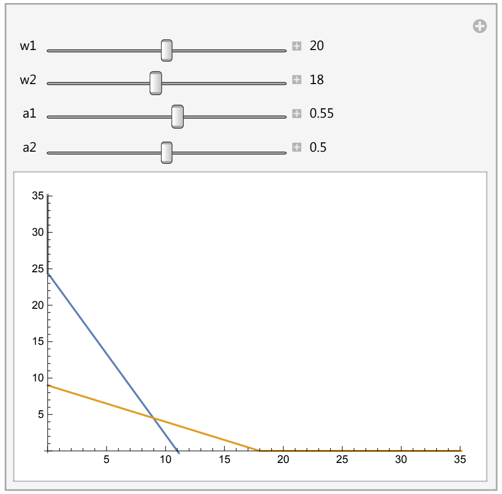
Ahora retomamos el problema de los valores negativos que hemos comentado antes. En el siguiente gráfico vemos a qué nos referíamos:

```
Module[{go}, Manipulate[
  go = g1 /. Quiet[Solve[(w1 * a1 - g1) / (1 - a1) == w2 * a2 - (1 - a2) * g1, g1]][[1]];
  Show[Plot[{(w1 * a1 - g1) / (1 - a1), w2 * a2 - (1 - a2) * g1}, {g1, -10, 40}, PlotRange →
     {-10, 35}], Graphics[{{Red, PointSize → Large, Point[{go, w2 * a2 - (1 - a2) * go}]},
      {Gray, Dashed, Line[{{go, 0}, {go, w2 * a2 - (1 - a2) * go},
         {0, w2 * a2 - (1 - a2) * go}}]}}]], {{w1, 25, "w1"}, 0, 40, Appearance → "Labeled"},
  {{w2, 15, "w2"}, 0, 40, Appearance → "Labeled"}, {{a1, 0.7, "a1"}, 0, 1,
   Appearance → "Labeled"}, {{a2, 0.4, "a2"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"}]]
```



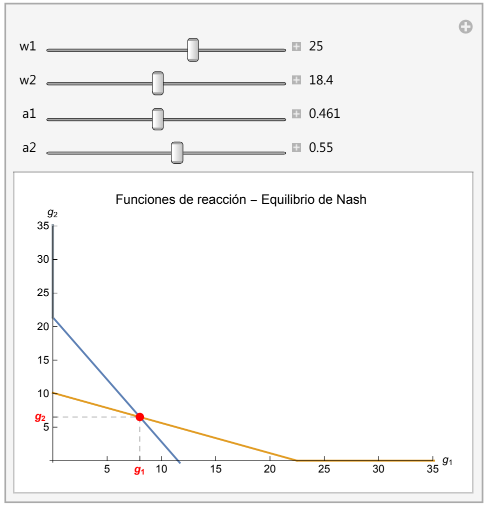
Lo solucionamos de la siguiente forma. Introducimos que en realidad las funciones de reacción son g1 = Max[(-1 + a1) g2 + a1 w1, 0] y g2 = Max[(-1 + a2) g1 + a2 w2, 0]
Esto hace un poco más complicada la representación con Mathematica para la curva de reacción del individuo 1, pues para g1=0 habría muchos valores de g2, y eso no se puede hacer con Plot, que representa funciones. Se podría hacer con representación de función implícita, mediante ContourPlot, pero también es posible y más simple dibujar la parte correspondiente al eje vertical.


```
Manipulate[Show[Plot[{(w1 * a1 - g1) / (1 - a1), Max[w2 * a2 - (1 - a2) * g1, 0]},
   {g1, 0, 40}, PlotRange → {{-.3, 35}, {-.3, 35}}],
  Graphics[{Darker[LightBlue], Thick, Line[{{0, (w1 * a1) / (1 - a1)}, {0, 40}}]}]],
 {{w1, 20, "w1"}, 0, 40, Appearance → "Labeled"},
 {{w2, 18, "w2"}, 0, 40, Appearance → "Labeled"},
 {{a1, 0.55, "a1"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{a2, 0.5, "a2"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"}]
```



Ahora queremos añadir algunas de las múltiples opciones gráficas que ofrece Mathematica, para facilitar la comprensión del gráfico. Para ello obtenemos el equilibrio resolviendo el sistema de las dos curvas de reacción. Necesitamos hacerlo así ya que no podemos despejar g2 para igualar como se hace en la anterior, al tener los Max[]
Cabe destacar que esto es algo muy complejo de hacer a mano, y sin embargo Mathematica lo resuelve con facilidad. También añadimos etiquetas al gráfico mediante el uso de Ticks.

```
Manipulate[{go1, go2} = {g1, g2} /.
   Quiet[Solve[{g1 == Max[0, w1 * a1 - (1 - a1) * g2], g2 == Max[0, w2 * a2 - (1 - a2) * g1]},
      {g1, g2} ]][[1]];
 Show[Plot[{(w1 * a1 - g1) / (1 - a1), Max[w2 * a2 - (1 - a2) * g1, 0]}, {g1, 0, 40},
   PlotRange → {{-.3, 35}, {-.3, 35}}, AxesLabel → {"g1", "g2"},
   PlotLabel → "Funciones de reacción - Equilibrio de Nash", ImageSize → 350, Ticks →
    {{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, {go1, Style[" g1 ", Red, Bold, Background → White]}},
     {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, {go2, Style[" g2 ", Red, Bold, Background → White]}}}],
  Graphics[{{Gray, Dashed, Line[{{go1, 0}, {go1, go2}, {0, go2}}]},
    {Red, PointSize → Large, Point[{go1, go2}]}, {Darker[LightBlue], Thick,
     Line[{{0, (w1 * a1) / (1 - a1)}, {0, 40}}]}}]], {{w1, 25, "w1"}, 0, 40, Appearance →
   "Labeled"}, {{w2, 18, "w2"}, 0, 40, Appearance → "Labeled"}, {{a1, 0.45, "a1"},
  0, 1, Appearance → "Labeled"}, {{a2, 0.55, "a2"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"}]
```



Provisión privada de un bien público. Dos individuos. Preferencias Cobb-Douglas y recta presupuestaria.

Si bien en las funciones de reacción hemos visto que la elección de g_i depende de la decisión del resto de individuos, también intervienen otros parámetros como a_1 y a_2, que proceden de la definición de las funciones de utilidad. En las funciones de reacción subyace un proceso de elección simultánea de los dos agentes, que quieren maximizar su utilidad, y que cada agente realiza por separado.

Para representarlo gráficamente, utilizamos la función ContourPlot, en la cual introducimos un vector gn, definido por el problema de maximización de utilidad de los agentes.

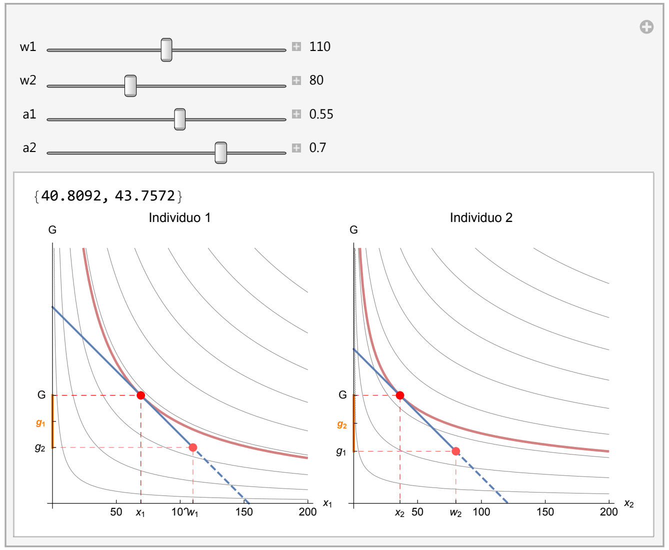
Para introducir la recta presupuestaria en función de este vector, la reescribimos. Por ejemplo, para el individuo 1, la restricción natural sería g_1=w_1-x_1. Despejamos w_1 y sumamos g_2 a ambos lados de forma que obtenemos que $g + x_1$= w_1+g_2. Realizamos también el proceso análogo con el individuo 2.

```
Manipulate[Quiet[{gn} = {g1, g2} /. Solve[
    {g1 == Max[{w1 a1 - (1 - a1) g2, 0}], g2 == Max[{w2 a2 - (1 - a2) g1, 0}]}, {g1, g2}]];
 Column[{
   gn, Row[{
     Show[ContourPlot[x1^(1 - a1) (g)^a1, {x1, 0, 200}, {g, 0, 200},
       ContourShading → False, ContourStyle → {Thick, Darker[Red]}, Contours →
        {(w1 - gn[[1]])^(1 - a1) (gn[[1]] + gn[[2]])^a1}, AxesLabel → {"x1", "G"},
       ImageSize → 250, Frame → False, Axes → True, PlotLabel → "Individuo 1",
       Ticks → {{50, 100, 150, 200, {w1, Style[" w1 ", Background → White]},
          {w1 - gn[[1]], Style[" x1 ", Background → White]}},
         {{gn[[1]] + gn[[2]], Style[" G ", Background → White]},
          {gn[[1]] + gn[[2]] - gn[[1]] / 2, Style[" g1 ", Orange, 8, Bold]},
          {gn[[2]], Style[" g2 ", Background → White]}}}],
      ContourPlot[x1^(1 - a1) (g)^a1, {x1, 0, 200}, {g, 0, 200},
       ContourShading → False, ContourStyle → Thin]
      , ContourPlot[x1 + g == w1 + gn[[2]], {x1, 0, w1}, {g, 0, 200},
       ContourShading → False], ContourPlot[x1 + g == w1 + gn[[2]], {x1, w1, 200},
       {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],
```

```
Graphics[{{Red, PointSize → Large, Point[{w1 - gn[[1]], gn[[1]] + gn[[2]]}]},
   {Red, Dashed, Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]]},
      {w1 - gn[[1]], gn[[1]] + gn[[2]]}, {w1 - gn[[1]], 0}}]},
   {Lighter[Red], Thin, Dashed, Line[{{w1, 0}, {w1, gn[[2]]}, {0, gn[[2]]}}]},
   {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w1, gn[[2]]}]},
   {Orange, Thick, Line[{{0, gn[[2]]}, {0, gn[[1]] + gn[[2]]}}]}}]
 ], Show[ContourPlot[x2^(1 - a2) (g)^a2, {x2, 0, 200}, {g, 0, 200},
   ContourShading → False, ContourStyle → {Thick, Darker[Red]}, Contours →
    {(w2 - gn[[2]])^(1 - a2) (gn[[2]] + gn[[1]])^a2}, AxesLabel → {"x2", "G"},
   ImageSize → 250, Frame → False, Axes → True, PlotLabel → "Individuo 2",
   Ticks → {{50, 100, 150, 200, {w2, Style[" w2 ", Background → White]},
      {w2 - gn[[2]], Style[" x2 ", Background → White]}},
     {{gn[[1]] + gn[[2]], Style[" G ", Background → White]},
      {gn[[1]] + gn[[2]] - gn[[2]]/2, Style[" g2 ", Orange, Bold, 8]},
      {gn[[1]], Style[" g1 ", Background → White]}}}],
  ContourPlot[x2^(1 - a2) (g)^a2, {x2, 0, 200}, {g, 0, 200},
   ContourShading → False, ContourStyle → Thin],
  ContourPlot[x2 + g == w2 + gn[[1]], {x2, 0, w2}, {g, 0, 200},
   ContourShading → False], ContourPlot[x2 + g == w2 + gn[[1]], {x2, w2, 200},
   {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],
  Graphics[{{Red, PointSize → Large, Point[{w2 - gn[[2]], gn[[1]] + gn[[2]]}]},
    {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w2, gn[[1]]}]},
    {Red, Thin, Dashed, Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]]},
       {w2 - gn[[2]], gn[[1]] + gn[[2]]}, {w2 - gn[[2]], 0}}]},
    {Lighter[Red], Thin, Dashed, Line[{{w2, 0}, {w2, gn[[1]]}, {0, gn[[1]]}}]},
    {Orange, Thick, Line[{{0, gn[[1]]}, {0, gn[[1]] + gn[[2]]}}]}}]
  ]}]],
{{w1, 110, "w1"}, 20, 200, Appearance -> "Labeled"},
```



```
{{w2, 80, "w2"}, 20, 200, Appearance -> "Labeled"},
{{a1, .55, "a1"}, .1, .9, Appearance -> "Labeled"},
{{a2, .7, "a2"}, .1, .9, Appearance -> "Labeled"}]
```



Podemos observar que cada gráfico por separado se asemeja a un problema de maximización común, en el que se busca el punto de tangencia entre la máxima curva de indiferencia que sea posible y la recta presupuestaria. Como vemos en el gráfico, los puntos viables de la recta presupuestaria son aquellos que están a la izquierda y por encima de la dotación inicial (incluida la propia dotación), lo cual ilustra la condición $g_i = w_i - x_i \geqslant 0$ (será estrictamente igual en la dotación porque el individuo gasta toda su riqueza en su consumo privado, siendo $x_i = w_i$, y será mayor que 0 en todos los puntos a la izquierda). ¿Por qué los puntos situados a la derecha de la dotación no son viables? Supongamos que sí fuesen viables: si la tangencia llevase a una solución en esa región, esta solución necesitaría de una cantidad de bien privado superior a la dotación, y un valor de bien público menor al que ya ha financiado la sociedad, lo cual a su vez requiere un valor de g_i negativo.

En estos casos interviene la condición de Kuhn-Tucker (mencionada en el apartado teórico), haciendo que todos estos casos sean considerados soluciones de "esquina" en los que el individuo no aporta ninguna cantidad a la financiación del bien público y se comporta como un polizón o "free-rider". La condición de Kuhn-Tucker establece que la relación marginal de sustitución entre el bien público y privado debe ser mayor o igual que 1. Observando la pendiente de la recta presupuestaria y de las funciones de utilidad, vemos que a partir de la solución de esquina la RMS pasa a ser menor que 1 (por lo que hace falta más de una unidad de G para sustituir a una de x) mientras que la pendiente sigue siendo 1.

Además, al desplazar el parámetro a_i para cualquiera de los agentes, la recta presupuestaria se mueve. ¿Por qué ocurre esto? La recta presupuestaria es la recta de pendiente -1 que pasa por la dotación inicial. La dotación inicial está formada por la riqueza total de cada individuo en el eje de las abscisas, y el valor de bien público financiado por el resto de consumidores en ese punto. Al variar las preferencias de uno de los individuos, puede variar la cantidad que el otro quiere aportar a la financiación del bien público, por eso la dotación inicial se mueve al cambiar las preferencias, y con ella la recta presupuestaria. Es decir, el movimiento es reflejo de la interdependencia entre las decisiones de los agentes.

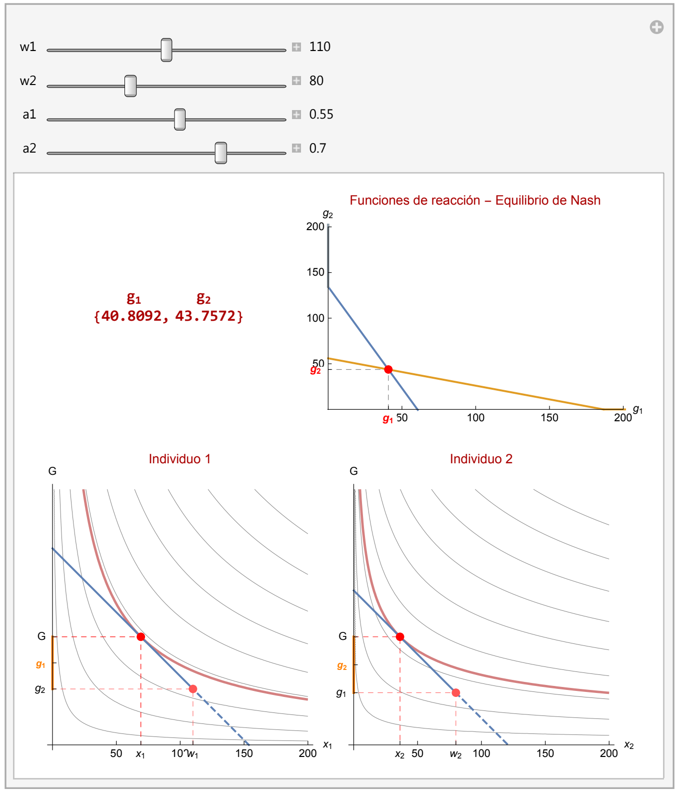
A continuación integramos todos los gráficos en uno sólo para tener una visión más general de los movimientos junto con las funciones de reacción.

```
Manipulate[Quiet[{gn} = {g1, g2} /. Solve[
manipula   silencioso               resuelve
    {g1 == Max[{w1 a1 - (1 - a1) g2, 0}], g2 == Max[{w2 a2 - (1 - a2) g1, 0}]}, {g1, g2}]];
           máximo                              máximo
 {go1, go2} = {g1, g2} /. Quiet[Solve[{g1 == Max[0, w1 * a1 - (1 - a1) * g2],
                          silenc··· resuelve   máximo
     g2 == Max[0, w2 * a2 - (1 - a2) * g1]}, {g1, g2} ]][[1]];
          máximo
 Column[{Row[{"          ", Column[{Row[{"    ", Style["g1", Bold, Darker[Red]] ,
 columna  fila                columna  fila        estilo        negrita más o··· rojo
      "        ", Style["g2", Bold, Darker[Red]]}], Style[gn, Bold, Darker[Red]]}],
                  estilo        negrita más o··· rojo  estilo     negrita más o··· rojo
   "        ", Show[Plot[{(w1 * a1 - g1) / (1 - a1), Max[w2 * a2 - (1 - a2) * g1, 0]},
                 mue··· representación gráfica       máximo
     {g1, 0, 250}, PlotRange → {{-.5, 200}, {-.5, 200}}, AxesLabel → {"g1", "g2"},
                   rango de representación                  etiqueta de ejes
     PlotLabel → Style["Funciones de reacción - Equilibrio de Nash", Darker[Red]],
                 estilo                                               más o··· rojo
     ImageSize → 280,
     tamaño de imagen
     Ticks → {{50, 100, 150, 200, {go1, Style[" g1 ", Red, Bold, Background → White]}},
     marcas                                estilo        rojo negrita fondo de imagen blanco
       {50, 100, 150, 200, {go2, Style[" g2 ", Red, Bold, Background → White]}}}],
                                 estilo        rojo negrita fondo de imagen blanco
    Graphics[{{Gray, Dashed, Line[{{go1, 0}, {go1, go2}, {0, go2}}]},
               gris  rayado  línea
      {Red, PointSize → Large, Point[{go1, go2}]}, {Darker[LightBlue],
       rojo tamaño de pu··· grande punto              más o···  azul claro
       Thick, Line[{{0, (w1 * a1) / (1 - a1)}, {0, 220}}]}}]]}], "   ", Row[{
              línea                                                    fila
   Show[ContourPlot[x1^(1 - a1) (g)^a1, {x1, 0, 200}, {g, 0, 200},
        representación de contornos
```



```
        representación de contornos
  ContourShading → False, ContourStyle → {Thick, Darker[Red]},
                   falso  estilo de contorno  grueso más o··· rojo
  Contours → {(w1 - gn[[1]])^(1 - a1) (gn[[1]] + gn[[2]])^a1},
  contornos
  AxesLabel → {"x1", "G"}, ImageSize → 250, Frame → False,
                           tamaño de imagen   marco    falso
  Axes → True, PlotLabel → Style["Individuo 1", Darker[Red]],
         verd··· etiqueta de r··· estilo         más o··· rojo
  Ticks → {{50, 100, 150, 200, {w1, Style[" w1 ", Background → White]},
                                     estilo        fondo de imagen blanco
     {w1 - gn[[1]], Style[" x1 ", Background → White]}},
                    estilo        fondo de imagen blanco
    {{gn[[1]] + gn[[2]], Style[" G ", Background → White]},
                         estilo       fondo de imagen blanco
     {gn[[1]] + gn[[2]] - gn[[1]] / 2, Style[" g1 ", Orange, 8, Bold]},
                                       estilo        naranja   negrita
     {gn[[2]], Style[" g2 ", Background → White]}}}],
               estilo        fondo de imagen blanco
 ContourPlot[x1^(1 - a1) (g)^a1, {x1, 0, 200}, {g, 0, 200},
 representación de contornos
  ContourShading → False, ContourStyle → Thin]
  sombreado de conto··· falso  estilo de contorno  delgado
 , ContourPlot[x1 + g == w1 + gn[[2]], {x1, 0, w1}, {g, 0, 200},
   representación de contornos
  ContourShading → False], ContourPlot[x1 + g == w1 + gn[[2]], {x1, w1, 200},
  sombreado de conto··· falso  representación de contornos
  {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],
               sombreado de conto··· falso  estilo de contorno  rayado
 Graphics[{{Red, PointSize → Large, Point[{w1 - gn[[1]], gn[[1]] + gn[[2]]}]} ,
 gráfico    rojo tamaño de pu··· grande punto
   {Red, Dashed, Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]]},
    rojo rayado  línea
      {w1 - gn[[1]], gn[[1]] + gn[[2]]}, {w1 - gn[[1]], 0}}]},
   {Lighter[Red], Thin, Dashed, Line[{{w1, 0}, {w1, gn[[2]]}, {0, gn[[2]]}}]},
    más claro rojo delg··· rayado línea
   {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w1, gn[[2]]}]},
    más claro rojo tamaño de pu··· grande punto
   {Orange, Thick, Line[{{0, gn[[2]]}, {0, gn[[1]] + gn[[2]]}}]}}]
    naranja grueso línea
], Show[ContourPlot[x2^(1 - a2) (g)^a2, {x2, 0, 200}, {g, 0, 200},
   mue··· representación de contornos
  ContourShading → False, ContourStyle → {Thick, Darker[Red]},
  sombreado de conto··· falso  estilo de contorno  grueso más o··· rojo
  Contours → {(w2 - gn[[2]])^(1 - a2) (gn[[2]] + gn[[1]])^a2},
  contornos
  AxesLabel → {"x2", "G"}, ImageSize → 250, Frame → False,
  etiqueta de ejes         tamaño de imagen   marco    falso
  Axes → True, PlotLabel → Style["Individuo 2", Darker[Red]],
  ejes   verd··· etiqueta de r··· estilo         más o··· rojo
  Ticks → {{50, 100, 150, 200, {w2, Style[" w2 ", Background → White]},
  marcas                             estilo        fondo de imagen blanco
     {w2 - gn[[2]], Style[" x2 ", Background → White]}},
                    estilo        fondo de imagen blanco
```

```
      {{gn[[1]] + gn[[2]], Style[" G ", Background → White]},
       {gn[[1]] + gn[[2]] - gn[[2]] / 2, Style[" g2 ", Orange, Bold, 8]},
       {gn[[1]], Style[" g1 ", Background → White]}}}],
    ContourPlot[x2^(1 - a2) (g)^a2, {x2, 0, 200}, {g, 0, 200},
     ContourShading → False, ContourStyle → Thin],
    ContourPlot[x2 + g == w2 + gn[[1]], {x2, 0, w2}, {g, 0, 200},
     ContourShading → False], ContourPlot[x2 + g == w2 + gn[[1]], {x2, w2, 200},
     {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],
    Graphics[{{Red, PointSize → Large, Point[{w2 - gn[[2]], gn[[1]] + gn[[2]]}]},
      {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w2, gn[[1]]}]}},
      {Red, Thin, Dashed, Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]]},
         {w2 - gn[[2]], gn[[1]] + gn[[2]]}, {w2 - gn[[2]], 0}}]},
      {Lighter[Red], Thin, Dashed, Line[{{w2, 0}, {w2, gn[[1]]}, {0, gn[[1]]}}]},
      {Orange, Thick, Line[{{0, gn[[1]]}, {0, gn[[1]] + gn[[2]]}}]}}]
   ]}]}],
 {{w1, 110, "w1"}, 20, 200, Appearance -> "Labeled"},
 {{w2, 80, "w2"}, 20, 200, Appearance -> "Labeled"},
 {{a1, .55, "a1"}, .1, .9, Appearance -> "Labeled"},
 {{a2, .7, "a2"}, .1, .9, Appearance -> "Labeled"}]
```

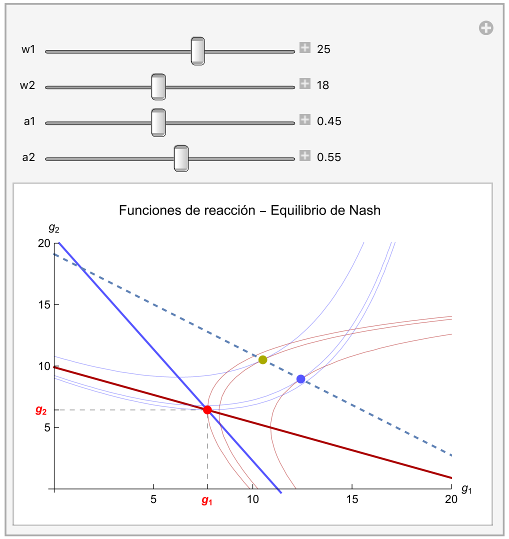


Anexo 4
Curvas de reacción y curvas de Isoutilidad.

Después de haber concretado la solución eficiente y la solución de equilibrio de Nash para dos consumidores, realizamos ciertos añadidos a las figuras para comparar los resultados. En la figura de las curvas de reacción aparecen dos puntos nuevos (en amarillo y azul), que corresponden a las aportaciones de las soluciones eficientes con aportación igualitaria y proporcional. Solo con los puntos ya se puede ver que la provisión del equilibrio de Nash es claramente inferior a la eficiente.

Además hay unas curvas, que llamaremos “curvas de isoutilidad”. Las curvas de isoutilidad del consumidor 1 recogen combinaciones (g1, g2) que, con sus correspondientes valores de x1, darían la misma utilidad al consumidor 1. Otro grupo de curvas hace lo mismo para la iso-utilidad del 2. El consumidor 1 está mejor en curvas más altas y el consumidor 2 incrementa su utilidad en las curvas que se situan más a la derecha. La figura muestra que el equilibrio de Nash no es eficiente, en tanto en cuanto hay pares (g1, g2) que ambos individuos considerarían mejores (si bien es equilibrio porque por separado no hay incentivos para variar su decisión).

```
Manipulate[
 {go1, go2} = {g1, g2} /. Quiet[Solve[{g1 == Max[0, w1 * a1 - (1 - a1) * g2], g2 ==
        Max[0, w2 * a2 - (1 - a2) * g1]}, {g1, g2}]][[1]];
 Show[Plot[{(w1 * a1 - g1) / (1 - a1), Max[w2 * a2 - (1 - a2) * g1, 0]}, {g1, 0, 40},
   PlotRange → {{-.3, 20}, {-.3, 20}}, PlotStyle → {Lighter[Blue], Darker[Red]},
   AxesLabel → {"g₁", "g₂"}, PlotLabel → "Funciones de reacción - Equilibrio
      de Nash", ImageSize → 350, Ticks → {{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35,
      {go1, Style[" g₁ ", Red, Bold, Background → White]}}, {5, 10, 15,
      20, 25, 30, 35, {go2, Style[" g₂ ", Red, Bold, Background → White]}}}],
  ContourPlot[U1[w1 - g1, g1, g2, a1], {g1, 0, 30}, {g2, 0, 30},
   ContourShading → False, ContourStyle → {Lighter[Blue]},
   Contours → {U1[w1 - go1, go1, go2, a1], U1[x1efieg[a1, a2, w1, w2],
      w1 - x1efieg[a1, a2, w1, w2], w2 - x2efieg[a1, a2, w1, w2], a1],
     U1[x1efiprop[a1, a2, w1, w2], w1 - x1efiprop[a1, a2, w1, w2],
      w2 - x2efiprop[a1, a2, w1, w2], a1]}],
  ContourPlot[U2[w2 - g2, g1, g2, a2], {g1, 0, 30}, {g2, 0, 30},
   ContourShading → False, ContourStyle → {Darker[Red]},
   Contours → {U2[w2 - go2, go1, go2, a2], U2[x2efieg[a1, a2, w1, w2],
      w1 - x1efieg[a1, a2, w1, w2], w2 - x2efieg[a1, a2, w1, w2], a2],
     U2[x2efiprop[a1, a2, w1, w2], w1 - x1efiprop[a1, a2, w1, w2],
      w2 - x2efiprop[a1, a2, w1, w2], a2]}],

  ContourPlot[w1 - g1 ==
    -(w1 - a1 w1 - a2 w1 + a1 a2 w1 + w2 - a1 w2 - a2 w2 + a1 a2 w2 - (w2 - g2) + a1 (w2 - g2))
      / (-1 + a2),
   {g1, 0, 30}, {g2, 0, 30}, ContourShading → False,
   ContourStyle → {DarkGray, Dashed}],

  Graphics[{{Gray, Dashed, Line[{{go1, 0}, {go1, go2}, {0, go2}}]},
    {Red, PointSize → Large, Point[{go1, go2}], {Darker[Yellow],
      Point[{w1 - x1efieg[a1, a2, w1, w2], w2 - x2efieg[a1, a2, w1, w2]}]},
     {Lighter[Blue], Point[{w1 - x1efiprop[a1, a2, w1, w2],
        w2 - x2efiprop[a1, a2, w1, w2]}]}},
    {Lighter[Blue], Thick, Line[{{0, (w1 * a1) / (1 - a1)}, {0, 40}}]}}]],
 {{w1, 25, "w1"}, 0, 40, Appearance → "Labeled"},
 {{w2, 18, "w2"}, 0, 40, Appearance → "Labeled"},
 {{a1, 0.45, "a1"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{a2, 0.55, "a2"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"},

 Initialization :→ (

   x1efieg[a1_, a2_, w1_, w2_] := -(2 w1 - 2 a1 w1 - a2 w1 + a1 a2 w1 - a2 w2 + a1 a2 w2)
                                   / (-2 + a1 + a2);
   x2efieg[a1_, a2_, w1_, w2_] := -(-a1 w1 + a1 a2 w1 + 2 w2 - a1 w2 - 2 a2 w2 + a1 a2 w2)
                                   / (-2 + a1 + a2);

   x1efiprop[a1_, a2_, w1_, w2_] := -((1 - a1 - a2 + a1 a2) w1 (w1 + w2))
                                     / (-w1 + a2 w1 - w2 + a1 w2);
   x2efiprop[a1_, a2_, w1_, w2_] := -((1 - a1 - a2 + a1 a2) w2 (w1 + w2))
                                     / (-w1 + a2 w1 - w2 + a1 w2);
   U1[x1_, g1_, g2_, a1_] := x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1;
   U2[x2_, g1_, g2_, a2_] := x2^(1 - a2) * (g1 + g2)^a2
  )]
```



Se puede observar también que en los puntos eficientes la iso-utilidad del 1 y la del 2 son tangentes. Por último se dibuja también la línea que recoge todos los puntos eficientes en sentido de Pareto, que serán todos los de tangencia, y que resulta ser una línea recta (lo cual probablemente es una característica de las preferencias de tipo Cobb-Douglas).

Equilibrio vs Eficiencia

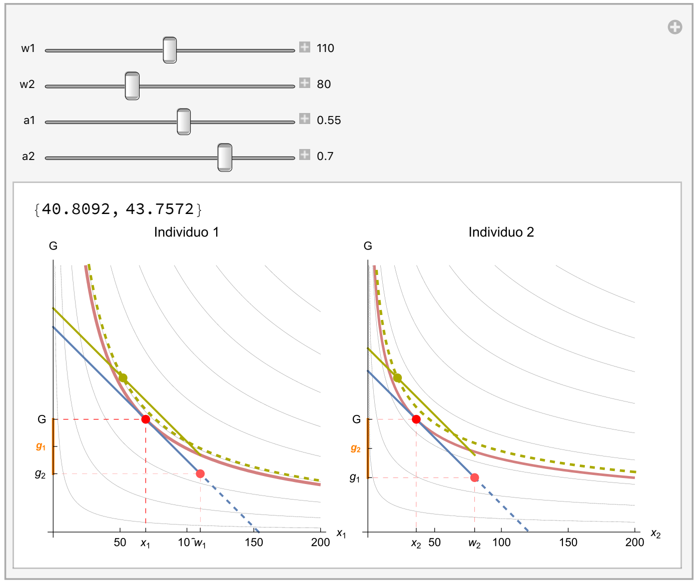
En cuanto a las figuras que vemos en la parte inferior, se añade una nueva restricción a la figura 1: suponemos que el individuo 2 aporta la cantidad g2 correspondiente a la solución eficiente igualitaria. En la función dejamos que maximice su utilidad dado lo que ha hecho el consumidor 2. Sin embargo, representamos el punto que en el que el individuo 1 también aporta la g1 eficiente igualitaria y pasamos por éste punto la recta presupuestaria.

```
Manipulate[Quiet[{gn} = {g1, g2} /. Solve[{g1 == Max[{w1 a1 - (1 - a1) g2, 0}],
      g2 == Max[{w2 a2 - (1 - a2) g1, 0}]}, {g1, g2}]];
 Column[{
   gn, Row[{
     Show[ContourPlot[x1^(1 - a1) (g)^a1, {x1, 0, 200}, {g, 0, 200},
       ContourShading → False, ContourStyle → {Thickness → 0.011, Darker[Red]},
       Contours → {(w1 - gn[[1]])^(1 - a1) (gn[[1]] + gn[[2]])^a1},
       AxesLabel → {"x1", "G"}, ImageSize → 250,
       Frame → False, Axes → True, PlotLabel → "Individuo 1",
       Ticks → {{50, 100, 150, 200, {w1, Style[" w1 ", Background → White]},
          {w1 - gn[[1]], Style[" x1 ", Background → White]}},
         {{gn[[1]] + gn[[2]], Style[" G ", Background → White]},
          {gn[[1]] + gn[[2]] - gn[[1]] / 2, Style[" g1 ", Orange, 8, Bold]},
          {gn[[2]], Style[" g2 ", Background → White]}}}],
      ContourPlot[x1^(1 - a1) (g)^a1, {x1, 0, 200}, {g, 0, 200},
       ContourShading → False, ContourStyle → Thin]
      , ContourPlot[x1 + g == w1 + gn[[2]], {x1, 0, w1}, {g, 0, 200},
       ContourShading → False], ContourPlot[x1 + g == w1 + gn[[2]], {x1, w1, 200},
       {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],

      (* Este bloque, hasta la línea en blanco, añade la restricción
       si el otro hiciera la aportación eficiente igualitaria*,
      el punto (pequeño) de responder con el g1 igualitario,
      y la curva que pasa por él, que no es tangente.*)
      ContourPlot[x1 + g == w1 + (w2 - x2efieg[a1, a2, w1, w2]), {x1, 0, w1},
       {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Darker[Yellow]],
      Graphics[{{Darker[Yellow], PointSize → Large, Point[{x1efieg[a1, a2, w1,
             w2], w1 + w2 - x1efieg[a1, a2, w1, w2] - x2efieg[a1, a2, w1, w2]}]} }],
      ContourPlot[x1^(1 - a1) (g)^a1 == x1efieg[a1, a2, w1, w2]^(1 - a1)
         (w1 + w2 - x1efieg[a1, a2, w1, w2] - x2efieg[a1, a2, w1, w2])^a1,
       {x1, 0, 200}, {g, 0, 200}, ContourShading → False,
       ContourStyle → {Dashed, Thick, Darker[Yellow]}],

      Graphics[
```



```
       {{Red, PointSize → Large, Point[{w1 - gn[[1]], gn[[1]] + gn[[2]]}]} ,
        {Red, Dashed, Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]]},
           {w1 - gn[[1]], gn[[1]] + gn[[2]]}, {w1 - gn[[1]], 0}}]}, {Lighter[Red],
         Thin, Dashed, Line[{{w1, 0}, {w1, gn[[2]]}, {0, gn[[2]]}}]},
        {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w1, gn[[2]]}]},
        {Orange, Thick, Line[{{0, gn[[2]]}, {0, gn[[1]] + gn[[2]]}}]}}]
     ], Show[ContourPlot[x2^(1 - a2) (g)^a2, {x2, 0, 200}, {g, 0, 200},
       ContourShading → False, ContourStyle → {Thick, Darker[Red]}, Contours →
        {(w2 - gn[[2]])^(1 - a2) (gn[[2]] + gn[[1]])^a2}, AxesLabel → {"x2", "G"},
       ImageSize → 250, Frame → False, Axes → True, PlotLabel → "Individuo 2",
       Ticks → {{50, 100, 150, 200, {w2, Style[" w2 ", Background → White]},
          {w2 - gn[[2]], Style[" x2 ", Background → White]}},
         {{gn[[1]] + gn[[2]], Style[" G ", Background → White]},
          {gn[[1]] + gn[[2]] - gn[[2]] / 2, Style[" g2 ", Orange, Bold, 8]},
          {gn[[1]], Style[" g1 ", Background → White]}}}],
      ContourPlot[x2^(1 - a2) (g)^a2, {x2, 0, 200}, {g, 0, 200},
       ContourShading → False, ContourStyle → Thin],
      ContourPlot[x2 + g == w2 + gn[[1]], {x2, 0, w2}, {g, 0, 200},
       ContourShading → False], ContourPlot[x2 + g == w2 + gn[[1]], {x2, w2, 200},
       {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],

      ContourPlot[x2 + g == w2 + (w1 - x1efieg[a1, a2, w1, w2]), {x2, 0, w2},
       {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Darker[Yellow]],
      Graphics[{{Darker[Yellow], PointSize → Large, Point[{x2efieg[a1, a2, w1,
             w2], w1 + w2 - x2efieg[a1, a2, w1, w2] - x1efieg[a1, a2, w1, w2]}]} }],
      ContourPlot[x2^(1 - a2) (g)^a2 == x2efieg[a1, a2, w1, w2]^(1 - a2)
         (w1 + w2 - x2efieg[a1, a2, w1, w2] - x1efieg[a1, a2, w1, w2])^a2,
       {x2, 0, 200}, {g, 0, 200}, ContourShading → False,
       ContourStyle → {Dashed, Thick, Darker[Yellow]}]

      , Graphics[
       {{Red, PointSize → Large, Point[{w2 - gn[[2]], gn[[1]] + gn[[2]]}]} ,
        {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w2, gn[[1]]}]},
        {Red, Thin, Dashed, Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]]},
           {w2 - gn[[2]], gn[[1]] + gn[[2]]}, {w2 - gn[[2]], 0}}]}, {Lighter[Red],
         Thin, Dashed, Line[{{w2, 0}, {w2, gn[[1]]}, {0, gn[[1]]}}]},
        {Orange, Thick, Line[{{0, gn[[1]]}, {0, gn[[1]] + gn[[2]]}}]}}]
     ]}]}],
 {{w1, 110, "w1" }, 20, 200, Appearance -> "Labeled"},
 {{w2, 80, "w2" }, 20, 200, Appearance -> "Labeled"},
 {{a1, .55, "a1" }, .1, .9, Appearance -> "Labeled"},
 {{a2, .7, "a2" }, .1, .9, Appearance -> "Labeled"},

 Initialization :> (
   x1efieg[a1_, a2_, w1_, w2_] :=
    -((2 w1 - 2 a1 w1 - a2 w1 + a1 a2 w1 - a2 w2 + a1 a2 w2) / (-2 + a1 + a2));
```

```
x2efieg[a1_, a2_, w1_, w2_] :=
 -((-a1 w1 + a1 a2 w1 + 2 w2 - a1 w2 - 2 a2 w2 + a1 a2 w2) / (-2 + a1 + a2));

x1efiprop[a1_, a2_, w1_, w2_] := - (1 - a1 - a2 + a1 a2) w1 (w1 + w2) / (-w1 + a2 w1 - w2 + a1 w2);
x2efiprop[a1_, a2_, w1_, w2_] := - (1 - a1 - a2 + a1 a2) w2 (w1 + w2) / (-w1 + a2 w1 - w2 + a1 w2);
U1[x1_, g1_, g2_, a1_] := x1^(1 - a1) * (g1 + g2)^a1;
U2[x2_, g1_, g2_, a2_] := x2^(1 - a2) * (g1 + g2)^a2
)]
```



Al dibujar la curva de indiferencia que pasa por ese punto se ve que el punto de tangencia entre recta presupuestaria y curva de utilidad, por lo que queda claro que la solución eficiente no es de equilibrio.

Si el consumidor 2 cumple con la aportación eficiente, al consumidor 1 le conviene no cumplir para de esta forma maximizar su utilidad; de hecho la figura muestra que bajo el supuesto de que el 2 va a cumplir con g1 eficiente al 1 le conviene buscar el punto de tangencia, en el que su aportación a la financiación decrece.

Por supuesto, en la figura del consumidor 2 está dibujado el proceso análogo (y por tanto contrario) del que sacamos las mismas conclusiones.

ANEXO 5.

```
In[1]:= Manipulate[gpub = t1 + t2 + t3 + t4 + t5;
  Quiet[{gn} = {g1, g2, g3, g4, g5} /.
     Solve[{g1 == Max[{(w1 - t1) a1 - (1 - a1) (g2 + g3 + g4 + g5 + gpub), 0}],
       g2 == Max[{(w2 - t2) a2 - (1 - a2) (g1 + g3 + g4 + g5 + gpub), 0}],
       g3 == Max[{(w3 - t3) a3 - (1 - a3) (g2 + g1 + g4 + g5 + gpub), 0}], g4 ==
        Max[{(w4 - t4) a4 - (1 - a4) (g2 + g3 + g1 + g5 + gpub), 0}], g5 == Max[{(w5 - t5)
            a5 - (1 - a5) (g2 + g3 + g4 + g1 + gpub), 0}]}, {g1, g2, g3, g4, g5}]];
  table = {{"Individuo", "Dotación de la renta", Column[{"Provisión eficiente",
        "igualitaria"}], Column[{"Provisión eficiente", "proporcional"}],
     Column[{"Provisión privada en", "equilibrio de Nash"}],
     Column[{"Consumo privado en", "equilibrio de Nash"}], "Impuestos"},
    {"1", w1, w1 - x1efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     w1 - x1efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5], gn[[1]], w1 - gn[[1]],
     t1}, {"2", w2, w2 - x2efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     w2 - x2efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5], gn[[2]], w2 - gn[[2]],
     t2}, {"3", w3, w3 - x3efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     w3 - x3efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5], gn[[3]], w3 - gn[[3]],
     t3}, {"4", w4, w4 - x4efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     w4 - x4efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5], gn[[4]], w4 - gn[[4]],
     t4}, {"5", w5, w5 - x5efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     w5 - x5efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     gn[[5]], w5 - gn[[5]], t5}, {"TOTAL", w1 + w2 + w3 + w4 + w5,
     w1 - x1efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5] +
      w2 - x2efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5] +
      w3 - x3efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5] +
      w4 - x4efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5] +
      w5 - x5efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     w1 - x1efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5] + w2 -
      x2efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5] +
      w3 - x3efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5] +
      w4 - x4efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5] +
      w5 - x5efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
     gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]],
     w1 + w2 + w3 + w4 + w5 - (gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]]),
     Row[{"F. pública = ", t1 + t2 + t3 + t4 + t5}]}};
  Column[{Row[{"          ", Grid[{{Show[ContourPlot[x1^(1 - a1) (g)^a1,
          {x1, 0, 60}, {g, 0, 60}, ContourShading → False,
          ContourStyle → {Thick, Darker[Red]}, Contours → {(w1 - gn[[1]])^(1 - a1)
              (gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub)^a1},
          AxesLabel → {"x1", "G"}, Frame → False, Axes → True,
          Ticks → {{10, 20, 30, 40, 50, {w1, Style[" w1 ", Background → White]},
              {w1 - gn[[1]], Style[" x1 ", Background → White]}},
             {{gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub,
                Style[" G ", Background → White]}, {gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[
                  4]] + gn[[5]] + gpub, Style[" G-i ", Background → White]}}}],
         ContourPlot[x1^(1 - a1) (g)^a1, {x1, 0, 60}, {g, 0, 60},
          ContourShading → False, ContourStyle → Thin]
         , ContourPlot[x1 + g == w1 + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub - t1,
          {x1, 0, w1}, {g, 0, 200}, ContourShading → False], ContourPlot[
          x1 + g == w1 + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub - t1, {x1, w1,
           200}, {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],
         Graphics[{{Red, PointSize → Large, Point[{w1 - gn[[1]], gn[[1]] +
                gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}]} , {Red, Dashed,
             Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
               {w1 - gn[[1]], gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
               {w1 - gn[[1]], 0}}]}, {Lighter[Red], Thin, Dashed,
             Line[{{w1, 0}, {w1, gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
               {0, gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}}]},
            {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w1, gn[[2]] + gn[[
                  3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}]}, {Orange, Thickness → 0.02,
             Line[{{0, gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
               {0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}}]},
            {Text[Style["Consumidor 1", Darker[Red]], {30, 50}]}}],
         ImageSize → 220 , AspectRatio → .7,
         If[gn[[1]] == 0, Background -> LightBlue, Background → White]
        ],
        Show[ContourPlot[x2^(1 - a2) (g)^a2,
          {x2, 0, 60}, {g, 0, 60}, ContourShading → False,
          ContourStyle → {Thick, Darker[Red]}, Contours → {(w2 - gn[[2]])^(1 - a2)
              (gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub)^a2},
          AxesLabel → {"x2", "G"}, Frame → False, Axes → True,
          Ticks → {{10, 20, 30, 40, 50, {w2, Style[" w2 ", Background → White]},
              {w2 - gn[[2]], Style[" x2 ", Background → White]}},
             {{gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub,
                Style[" G ", Background → White]}, {gn[[1]] + gn[[3]] + gn[[
                  4]] + gn[[5]] + gpub, Style[" G-i ", Background → White]}}}],
         ContourPlot[x2^(1 - a2) (g)^a2, {x2, 0, 60}, {g, 0, 60},
          ContourShading → False, ContourStyle → Thin]
         , ContourPlot[x2 + g == w2 + gn[[1]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub - t2,
          {x2, 0, w2}, {g, 0, 200}, ContourShading → False], ContourPlot[
          x2 + g == w2 + gn[[1]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub - t2, {x2, w2,
           200}, {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],
         Graphics[{{Red, PointSize → Large, Point[{w2 - gn[[2]], gn[[1]] +
                gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}]} , {Red, Dashed,
             Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
               {w2 - gn[[2]], gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
               {w2 - gn[[2]], 0}}]}, {Lighter[Red], Thin, Dashed,
             Line[{{w2, 0}, {w2, gn[[1]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
               {0, gn[[1]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}}]},
            {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w2, gn[[1]] + gn[[
```

```
          3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}]}, {Orange, Thickness → 0.02,
        Line[{{0, gn[[1]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
          {0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}}]}},
       {Text[Style["Consumidor 2", Darker[Red]], {30, 50}]}}],
     ImageSize → 220 , AspectRatio → .7,
     If[gn[[2]] == 0, Background -> LightBlue, Background → White]
    ],
    Show[ContourPlot[x3^(1 - a3) (g)^a3,
      {x3, 0, 60}, {g, 0, 60}, ContourShading → False,
      ContourStyle → {Thick, Darker[Red]}, Contours → {(w3 - gn[[3]])^(1 - a3)
         (gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub)^a2},
      AxesLabel → {"x3", "G"}, Frame → False, Axes → True,
      Ticks → {{10, 20, 30, 40, 50, {w3, Style[" w3 ", Background → White]},
         {w3 - gn[[3]], Style[" x2 ", Background → White]}},
        {{gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub,
          Style[" G ", Background → White]}, {gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[
            4]] + gn[[5]] + gpub, Style[" G-i ", Background → White]}}}],
     ContourPlot[x3^(1 - a3) (g)^a3, {x3, 0, 60}, {g, 0, 60},
      ContourShading → False, ContourStyle → Thin]
     , ContourPlot[x3 + g == w3 + gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub - t3,
      {x3, 0, w3}, {g, 0, 200}, ContourShading → False], ContourPlot[
      x3 + g == w3 + gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub - t3, {x3, w3,
       200}, {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],
     Graphics[{{Red, PointSize → Large, Point[{w3 - gn[[3]], gn[[1]] +
            gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}]} , {Red, Dashed,
        Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
          {w3 - gn[[3]], gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
          {w3 - gn[[3]], 0}}]}, {Lighter[Red], Thin, Dashed,
        Line[{{w3, 0}, {w3, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
          {0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}}]},
       {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w3, gn[[1]] + gn[[
            2]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}]}, {Orange, Thickness → 0.02,
        Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
          {0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}}]}},
       {Text[Style["Consumidor 3", Darker[Red]], {30, 50}]}}],
     ImageSize → 220 , AspectRatio → .7,
     If[gn[[3]] == 0, Background -> LightBlue, Background → White]
    ]}, {"
"},
   {Show[ContourPlot[x4^(1 - a4) (g)^a4,
      {x4, 0, 60}, {g, 0, 60}, ContourShading → False,
      ContourStyle → {Thick, Darker[Red]}, Contours → {(w4 - gn[[4]])^(1 - a4)
         (gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub)^a4},
      AxesLabel → {"x4", "G"}, Frame → False, Axes → True,
      Ticks → {{10, 20, 30, 40, 50, {w4, Style[" w4 ", Background → White]},
         {w4 - gn[[4]], Style[" x4 ", Background → White]}},
        {{gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub,
          Style[" G ", Background → White]}, {gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[
            3]] + gn[[5]] + gpub, Style[" G-i ", Background → White]}}}],
     ContourPlot[x4^(1 - a4) (g)^a4, {x4, 0, 60}, {g, 0, 60},
      ContourShading → False, ContourStyle → Thin]
     , ContourPlot[x4 + g == w4 + gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[5]] + gpub - t4,
      {x4, 0, w4}, {g, 0, 200}, ContourShading → False], ContourPlot[
      x4 + g == w4 + gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[5]] + gpub - t4, {x4, w4,
       200}, {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],
     Graphics[{{Red, PointSize → Large, Point[{w4 - gn[[4]], gn[[1]] +
            gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}]} , {Red, Dashed,
        Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
          {w4 - gn[[4]], gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
          {w4 - gn[[4]], 0}}]}, {Lighter[Red], Thin, Dashed,
        Line[{{w4, 0}, {w4, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[5]] + gpub},
          {0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[5]] + gpub}}]},
       {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w4, gn[[1]] + gn[[
            2]] + gn[[3]] + gn[[5]] + gpub}]}, {Orange, Thickness → 0.02,
        Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[5]] + gpub},
          {0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}}]}},
       {Text[Style["Consumidor 4", Darker[Red]], {30, 50}]}}],
     ImageSize → 220 , AspectRatio → .7,
     If[gn[[4]] == 0, Background -> LightBlue, Background → White]
    ],
    BarChart[{{w5 - x5efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
       w4 - x4efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
       w3 - x3efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
       w2 - x2efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
       w1 - x1efieg[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5]},
      {w5 - x5efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
       w4 - x4efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
       w3 - x3efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
       w2 - x2efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5],
       w1 - x1efiprop[a1, a2, a3, a4, a5, w1, w2, w3, w4, w5]},
      {gn[[5]], gn[[4]], gn[[3]], gn[[2]], gn[[1]]}},
     ChartLayout → "Stacked", Axes -> False,
     ChartLabels → {Placed[{Row[{Column[{"Provisión",
            "eficiente", "igualitaria"}]}],
         Row[{Column[{"Provisión", "eficiente", "proporcional"}]}],
         Row[{Column[{"Equilibrio", " de Nash"}]}]}, Above],
       Placed[{"", "", ""}, Top]}, ChartLegends → {"Consumidor 5",
       "Consumidor 4", "Consumidor 3", "Consumidor 2", "Consumidor 1"},
     ImageSize → 200, AspectRatio → .7]
    , Show[ContourPlot[x5^(1 - a5) (g)^a5,
      {x5, 0, 60}, {g, 0, 60}, ContourShading → False,
      ContourStyle → {Thick, Darker[Red]}, Contours → {(w5 - gn[[5]])^(1 - a5)
         (gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub)^a5},
      AxesLabel → {"x5", "G"}, Frame → False, Axes → True,
```

```
          Ticks → {{10, 20, 30, 40, 50, {w5, Style[" w5 ", Background → White]},
             {w5 - gn[[5]], Style[" x5 ", Background → White]}},
            {{gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub,
              Style[" G ", Background → White]}, {gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[
                3]] + gn[[4]] + gpub, Style[" G-i ", Background → White]}}}],
         ContourPlot[x5^(1 - a5) (g)^a5, {x5, 0, 60}, {g, 0, 60},
          ContourShading → False, ContourStyle → Thin]
         , ContourPlot[x5 + g == w5 + gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gpub - t5,
          {x5, 0, w5}, {g, 0, 200}, ContourShading → False], ContourPlot[
          x5 + g == w5 + gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gpub - t5, {x5, w5,
           200}, {g, 0, 200}, ContourShading → False, ContourStyle → Dashed],
         Graphics[{{Red, PointSize → Large, Point[{w5 - gn[[5]], gn[[1]] +
                gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}]} , {Red, Dashed,
            Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
              {w5 - gn[[5]], gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub},
              {w5 - gn[[5]], 0}}]}, {Lighter[Red], Thin, Dashed,
            Line[{{w5, 0}, {w5, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gpub},
              {0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gpub}}]},
           {Lighter[Red], PointSize → Large, Point[{w5, gn[[1]] + gn[[
                2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gpub}]}, {Orange, Thickness → 0.02,
            Line[{{0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gpub},
              {0, gn[[1]] + gn[[2]] + gn[[3]] + gn[[4]] + gn[[5]] + gpub}}]},
           {Text[Style["Consumidor 5", Darker[Red]], {30, 50}]}}],
         ImageSize → 220 , AspectRatio → .7,
         If[gn[[5]] == 0, Background -> LightBlue, Background → White]
        ]}}]}], "
", Grid[{{"          ",
      Panel@Grid[table, Frame → All, Dividers → Directive[Gray, Thickness[4]],
        ItemSize → {Automatic, 2}, Background → {None, {LightYellow,
           {LightBlue, LightOrange}}, 1 → LightYellow}], "   "}}]}],

 Item[Grid[{{Style[" U1(G,x1)=G^α1 x^(1-α1) "], Style[" U2(G,x2)=G^α2 x^(1-α2) "],
     Style[" U3(G,x3)=G^α3 x^(1-α3) "], Style[" U4(G,x4)=G^α4 x^(1-α4) "],
     Style[" U5(G,x5)=G^α5 x^(1-α5) "], Style["Dot. total W", 12]},

    {Control[
      {{a1, .6, "α1"}, .1, .9, .1, ImageSize → Tiny, Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{a2, .7, "α2"}, .1, .9, .1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{a3, .7, "α3"}, .1, .9, .1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{a4, .2, "α4"}, .1, .9, .1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{a5, .8, "α5"}, .1, .9, .1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Style["(Si está en rojo hay que ajustar)"]},
```

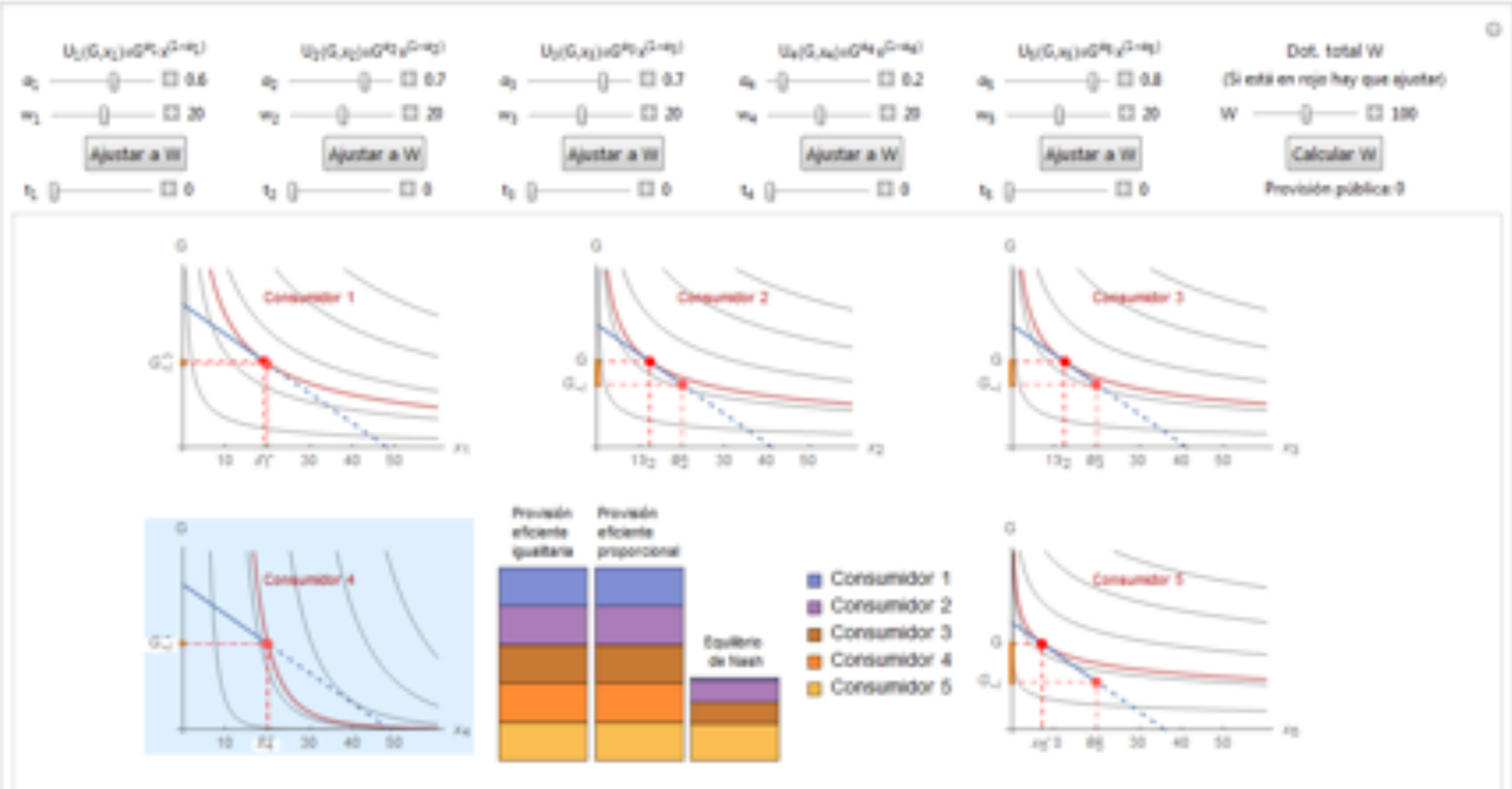
```
    {Control[
      {{w1, 20, "w1"}, 0, 40, 1, ImageSize → Tiny, Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{w2, 20, "w2"}, 0, 40, 1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{w3, 20, "w3"}, 0, 40, 1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{w4, 20, "w4"}, 0, 40, 1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{w5, 20, "w5"}, 0, 40, 1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Dynamic[Style[Control[{{wtot, 100, " W "}, 0, 200, 2,
         ImageSize → Tiny, Appearance → "Labeled"}],
       If[wtot == w1 + w2 + w3 + w4 + w5, 12, {12, Background → Red, White}]]]},

    {Button["Ajustar a W",
      Dynamics[w1 = wtot - w2 - w3 - w4 - w5], ImageSize → Automatic],
     Button["Ajustar a W", Dynamics[w2 = wtot - w1 - w3 - w4 - w5],
      ImageSize → Automatic], Button["Ajustar a W",
      Dynamics[w3 = wtot - w2 - w1 - w4 - w5], ImageSize → Automatic], Button[
      "Ajustar a W", Dynamics[w4 = wtot - w2 - w3 - w1 - w5], ImageSize → Automatic],
     Button["Ajustar a W", Dynamics[w5 = wtot - w2 - w3 - w4 - w1],
      ImageSize → Automatic], Button["Calcular W",
      Dynamics[wtot = w1 + w2 + w3 + w4 + w5], ImageSize → Automatic]},

    {Control[
      {{t1, 0, "t1"}, 0, 10, 1, ImageSize → Tiny, Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{t2, 0, "t2"}, 0, 10, 1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{t3, 0, "t3"}, 0, 10, 1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{t4, 0, "t4"}, 0, 10, 1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Control[{{t5, 0, "t5"}, 0, 10, 1, ImageSize → Tiny,
       Appearance → "Labeled"}],
     Dynamic[Row[{Style["Provisión pública: "], t1 + t2 + t3 + t4 + t5}]]}
   }]],

 Initialization :→ (Gefieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
    (5 (a3 w3 - a3 a4 w3 - a3 a5 w3 + a3 a4 a5 w3 + a4 w4 - a3 a4 w4 -
          a4 a5 w4 + a3 a4 a5 w4 + a5 w5 - a3 a5 w5 - a4 a5 w5 + a3 a4 a5 w5 +
          a2 (- (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 - a4 w4 + a4 a5 w4 - a5 w5 + a4 a5 w5 +
             a3 ((-1 + a4 + a5 - a4 a5) w3 + a5 w5 + a4 (w4 - a5 w4 - a5 w5))) +
          a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 - a3 w3 + a3 a4 w3 +
             a3 a5 w3 - a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + a4 a5 w4 -
             a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4 a5 w5 - a3 a4 a5 w5 +
             a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 - a4 a5 w5 + a3
                  ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + a4 (-1 + a5) w4 - a5 w5 + a4 a5 w5))))) /
```

```
    (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
      a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
      a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
         a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5))));
x1efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 - (((-1 + a1) ((5 - 4 a4 - 4 a5 + 3 a4 a5 + a3 (-4 + 3 a4 + 3 a5 - 2 a4 a5) +
             a2 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5)) w1 -
          a3 w3 + a3 a4 w3 + a3 a5 w3 - a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + a4 a5 w4 -
          a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4 a5 w5 - a3 a4 a5 w5 +
          a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 - a4 a5 w5 +
             a3 ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + a4 (-1 + a5) w4 - a5 w5 + a4 a5 w5)))) /
      (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
        a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
        a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
           a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))));
x2efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 - (((-1 + a2) ((5 - 4 a5 + a4 (-4 + 3 a5) + a3 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + 3 a5)) w2 -
          a3 w3 + a3 a4 w3 + a3 a5 w3 - a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 +
          a4 a5 w4 - a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4 a5 w5 - a3 a4 a5 w5 +
          a1 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) +
                3 a5 - 2 a4 a5) w2 + a3 w3 - a3 a4 w3 - a3 a5 w3 + a3 a4 a5 w3 + a4 w4 - a3
               a4 w4 - a4 a5 w4 + a3 a4 a5 w4 + a5 w5 - a3 a5 w5 - a4 a5 w5 + a3 a4 a5 w5))) /
      (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
        a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
        a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
           a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))));
x3efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 - (((-1 + a3) (5 w3 - 4 a4 w3 - 4 a5 w3 + 3 a4 a5 w3 - a4 w4 +
          a4 a5 w4 - a5 w5 + a4 a5 w5 + a2 ((-1 + a4 + a5 - a4 a5) w2 +
             (-4 + 3 a4 + 3 a5 - 2 a4 a5) w3 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 - a4 a5 w5) +
          a1 ((-1 + a2) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 - 4 w3 + 3 a4 w3 + 3 a5 w3 -
             2 a4 a5 w3 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 - a4 a5 w5 + a2 ((-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
                (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) w3 - a4 w4 + a4 a5 w4 - a5 w5 + a4 a5 w5)))) /
      (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
        a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
        a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
           a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))));
x4efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 - (((-1 + a4) (-a3 w3 + a3 a5 w3 + 5 w4 - 4 a3 w4 - 4 a5 w4 +
          3 a3 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a2 ((-1 + a3 + a5 - a3 a5) w2 - 4 w4 +
             3 a5 w4 + a5 w5 + a3 (w3 - a5 w3 + 3 w4 - 2 a5 w4 - a5 w5)) +
          a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a5) w1 + a3 w3 - a3 a5 w3 - 4 w4 + 3 a3 w4 +
             3 a5 w4 - 2 a3 a5 w4 + a5 w5 - a3 a5 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a5) w2 +
                3 w4 - 2 a5 w4 - a5 w5 + a3 ((-1 + a5) w3 + (-2 + a5) w4 + a5 w5))))) /
      (5 - 4 a3 - 4 a4 + 3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 +
        a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) +
        a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5 - 2 a4 a5 +
```



```
           a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))));
x5efieg[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 - (((-1 + a5) (-a3 w3 + a3 a4 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + 5 w5 - 4 a3 w5 -
          4 a4 w5 + 3 a3 a4 w5 + a2 ((-1 + a3 + a4 - a3 a4) w2 + a4 w4 -
             4 w5 + 3 a4 w5 + a3 (w3 - a4 w3 + 3 w5 - a4 (w4 + 2 w5))) +
          a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) w1 + a3 w3 - a3 a4 w3 + a4 w4 - a3 a4 w4 - 4 w5 +
             3 a3 w5 + 3 a4 w5 - 2 a3 a4 w5 + a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) w2 - a4 w4 + 3 w5 -
                2 a4 w5 + a3 ((-1 + a4) w3 - 2 w5 + a4 (w4 + w5)))))) / (5 - 4 a3 - 4 a4 +
        3 a3 a4 - 4 a5 + 3 a3 a5 + 3 a4 a5 - 2 a3 a4 a5 + a2 (-4 + a4 (3 - 2 a5) + a3
           (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) + 3 a5) + a1 (-4 + 3 a4 + a3 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5) +
           3 a5 - 2 a4 a5 + a2 (3 + a4 (-2 + a5) - 2 a5 + a3 (-2 + a4 + a5)))));
Gefiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 ((w1 + w2 + w3 + w4 + w5) (a3 w3 - a3 a4 w3 - a3 a5 w3 + a3 a4 a5 w3 + a4 w4 -
        a3 a4 w4 - a4 a5 w4 + a3 a4 a5 w4 + a5 w5 - a3 a5 w5 - a4 a5 w5 + a3 a4 a5 w5 +
        a2 (-(-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 - a4 w4 + a4 a5 w4 - a5 w5 + a4 a5 w5 +
           a3 ((-1 + a4 + a5 - a4 a5) w3 + a5 w5 + a4 (w4 - a5 w4 - a5 w5))) +
        a1 ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 - a3 w3 + a3 a4 w3 +
           a3 a5 w3 - a3 a4 a5 w3 - a4 w4 + a3 a4 w4 + a4 a5 w4 -
           a3 a4 a5 w4 - a5 w5 + a3 a5 w5 + a4 a5 w5 - a3 a4 a5 w5 +
           a2 ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + a4 w4 - a4 a5 w4 + a5 w5 - a4 a5 w5 + a3
              ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + a4 (-1 + a5) w4 - a5 w5 + a4 a5 w5))))) /
   ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 + (-1 + a1)
      ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 +
        (-1 + a2) ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5))));
x1efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 - (((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
     ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 +
       (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + (-1 + a2)
           ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))));
x2efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 - (((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
     ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 +
       (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + (-1 + a2)
           ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))));
x3efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 - (((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w3 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
     ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 +
       (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + (-1 + a2)
           ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))));
x4efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 - (((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w4 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
     ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 +
       (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + (-1 + a2)
           ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))));
x5efiprop[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, w1_, w2_, w3_, w4_, w5_] :=
 - (((-1 + a1) (-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w5 (w1 + w2 + w3 + w4 + w5)) /
     ((-1 + a2) (-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w1 +
```

```
        (-1 + a1) ((-1 + a3) (-1 + a4) (-1 + a5) w2 + (-1 + a2)
            ((-1 + a4) (-1 + a5) w3 + (-1 + a3) ((-1 + a5) w4 + (-1 + a4) w5)))));
), Bookmarks -> {Teorema1 :> {a1 = 0.6`, a2 = 0.7`, a3 = 0.7`,
   a4 = 0.2`, a5 = 0.8`, t1 = 0, t2 = 0, t3 = 0, t4 = 0, t5 = 0,
   w1 = 20, w2 = 26, w3 = 26, w4 = 20, w5 = 8, wtot = 100},
 Neutralidad :> {a1 = 0.6`, a2 = 0.7`, a3 = 0.7`, a4 = 0.2`, a5 = 0.8`, t1 = 0, t2 = 0,
   t3 = 0, t4 = 0, t5 = 0, w1 = 20, w2 = 15, w3 = 25, w4 = 20, w5 = 20, wtot = 100},
 6.3` Teorema :> {a1 = 0.6`, a2 = 0.7`, a3 = 0.7`, a4 = 0.2`, a5 = 0.8`, t1 = 0, t2 = 6,
   t3 = 0, t4 = 0, t5 = 0, w1 = 20, w2 = 15, w3 = 25, w4 = 20, w5 = 20, wtot = 100}}]
```



Individuo	Dotación de la renta	Provisión eficiente igualitaria	Provisión eficiente proporcional	Provisión privada en equilibrio de Nash	Impuestos
1	20	13.5135	13.5135	0.772532	0
2	20	13.5135	13.5135	7.63948	0
3	20	13.5135	13.5135	7.63948	0
4	20	13.5135	13.5135	0	0
5	20	13.5135	13.5135	12.7897	0
TOTAL	100	67.5676	67.5676	28.8412	F. pública = 0

ANEXO 6 - Dos consumidores con preferencias Cobb-Douglas. Un bien público y un bien privado. Obtención de la solución eficiente.

La suma de relaciones marginales de sustitución junto con las restricciones naturales del tipo $g_i = w_{i-}x_i$, forman un sistema de ecuaciones como el siguiente:

$$\frac{\alpha_1 x_1}{(1-\alpha_1)*G} + \frac{\alpha_2 x_2}{(1-\alpha_2)*G} = 1$$

$$g_1 = w_1 - x_1$$

$$g_2 = w_2 - x_2$$

A través de la igualación, podemos despejar la demanda de bien privado x_i de cada individuo en función de la demanda de bien privado del otro individuo, de la riqueza total y de los parámetros α_1, asociados a las preferencias Cobb-Douglas. Para ello hacemos lo siguiente:

$$G = g_1 + g_2 = w_1 - x_1 + w_2 - x_2$$

$$\frac{\alpha_1 x_1}{(1-\alpha_1)} + \frac{\alpha_2 x_2}{(1-\alpha_2)} = G = w_1 + w_2 - x_1 - x_2$$

$$\boldsymbol{x_1 = (w_1 + w_2)*(1-\alpha_1) - \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}*x_2}$$

$$\boldsymbol{x_2 = (w_1 + w_2)*(1-\alpha_2) - \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}*x_1}$$

La disposición marginal a pagar por el bien público depende habitualmente del nivel actual de x_i en ese punto, pero como a su vez las demandas de x están interrelacionadas, podemos expresar G de la siguiente manera:

$$G = g_1 + g_2 = w_1 - x_1 + w_2 - x_2$$

Si sustituimos x_i:

$$\boldsymbol{G = \alpha_1 *(w_1 + w_2) + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)*x_2}{(1-\alpha_2)}}$$

$$\boldsymbol{G = \alpha_2 *(w_1 + w_2) + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)*x_1}{(1-\alpha_1)}}$$

Para la obtención de la solución eficiente igualitaria, planteamos la restricción y la reescribimos en función de g y w:

$$g_1{}^I = g_2{}^I$$
$$w_1 - x_1{}^I = w_2 - x_2{}^I$$

A continuación despejamos una de las demandas de bienes privados (elegimos despejar la del individuo 1). Posteriormente sustituimos su valor por el que hemos obtenido previamente:

$$x_1{}^I = w_1 - w_2 + x_2{}^I$$
$$x_1{}^I = w_1 - w_2 + (w_1 + w_2) * (1 - \alpha_2) - \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} * x_1{}^I$$

Despejando x_1 obtenemos la siguiente expresión que a su vez nos permite obtener las correspondientes $x_2{}^I$ y G^I:

$$\boldsymbol{x_1{}^I = \frac{[w_1(2 - \alpha_2) - \alpha_2 w_2] * (1 - \alpha_1)}{2 - \alpha_1 - \alpha_2}}$$

Para la obtención de la solución eficiente proporcional la restricción que añadimos es:

$$\frac{g_1{}^P}{w_1} = \frac{g_2{}^P}{w_2}$$

A continuación reescribimos la restricción en función de la riqueza y la demanda de bienes privados. De esta forma podemos despejar tanto x_1 como x_2:

$$\frac{w_1 - x_1{}^P}{w_1} = \frac{w_2 - x_2{}^P}{w_2}$$
$$x_2{}^P = \frac{w_2}{w_1} x_1{}^P$$

Después sustituimos x_1 por el valor obtenido y despejamos x_2:

$$x_2{}^P = \frac{w_2}{w_1}(w_1 + w_2) * (1 - \alpha_1) - \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} * x_2{}^P$$

$$\boldsymbol{x_2{}^P = \frac{w_2 * (w_1 + w_2) * (1 - \alpha_1) * (1 - \alpha_2)}{2 - \alpha_1 - \alpha_2}}$$

ANEXO 7 - Dos consumidores con preferencias Cobb-Douglas. Un bien público y un bien privado. Obtención de las curvas de reacción y de la solución de equilibrio de Nash.

$$\max U_1(x_1, g_1 + g_2)$$

$$s.a.\ x_1 + g_1 = w_1$$

Para resolverlo construimos la función Lagrangiana y hallamos sus derivadas parciales.

$$L(x_1, g_1, \lambda) = x_1{}^{1-\alpha 1}(g_1 + g_2)^{\alpha 1} - \lambda(x_1 + g_1 - w_1)$$

$$\frac{\partial L(x_1, g_1, \lambda)}{\partial x_1} = (1 - \alpha_1)x_1{}^{-\alpha_1}(g_1 + g_2)^{\alpha 1} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, g_1, \lambda)}{\partial g_1} = x_1{}^{1-\alpha_1}\alpha_1(g_1 + g_2)^{\alpha 1 - 1} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, g_1, \lambda)}{\partial \lambda} = x_1 + g_1 = w_1$$

Igualando las dos primeras derivadas obtenemos:

$$(1 - \alpha_1)x_1{}^{-\alpha_1}(g_1 + g_2)^{\alpha 1} - 1 = x_1{}^{1-\alpha_1}\alpha_1(g_1 + g_2)^{\alpha 1 - 1} - 1$$

Ahora agrupamos términos similares y reducimos las fracciones.

$$\frac{(1 - \alpha_1)}{\alpha_1}\frac{(g_1 + g_2)^{\alpha_1}}{(g_1 + g_2)^{\alpha_1 - 1}} = \frac{x_1{}^{1-\alpha_1}}{x_1{}^{-\alpha_1}}$$

A continuación, junto con la expresión obtenida de la tercera derivada parcial, planteamos un sistema de dos ecuaciones:

$$x_1 = \frac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1}(g_1 + g_2), \qquad x_1 + g_1 = w_1$$

Después, despejamos g_1:, lo sustituimos en la otra ecuación y despejamos x_1:

$$x_1 = \frac{(1 - \alpha_1)}{\alpha_1}(w_1 - x_1 + g_2)$$

$$x_1 + \frac{(1 - \alpha_1)}{\alpha_1} = \frac{(1 - \alpha_1)}{\alpha_1}(w_1 + g_2)$$

$$x_1\frac{1}{\alpha_1} = \frac{(1 - \alpha_1)}{\alpha_1}(w_1 + g_2)$$

$$\boldsymbol{x_1 = (1 - \alpha_1)(w_1 + g_2)}$$

Partimos de la restricción obtenida a partir de la tercera derivada parcial, despejamos g_1 y sustituimos la función de demanda de x_1 que acabamos de obtener.

$$g_1 = w_1 - x_1$$

$$x_1 = (1 - \alpha_1)\,(w_1 + g_2)$$

$$g_1 = w_1 - (1 - \alpha_1)\,(w_1 + g_2)$$

$$\boldsymbol{g_1 = w_1\alpha_1 - (1 - \alpha_1)\, g_2}$$

Esta última expresión es lo que llamamos **función de reacción** del bien 1. Podemos obtener de forma análoga la expresión para el consumidor 2.

El equilibrio de Nash debe ser un punto perteneciente tanto a la función de reacción del individuo 1 como a la del individuo 2, es decir, su intersección. Consideramos las dos ecuaciones planteamos el sistema de ecuaciones y obtenemos los valores de g_i.

$$g_1 = w_1\alpha_1 - (1 - \alpha_1)g_2$$

$$g_2 = w_2\alpha_2 - (1 - \alpha_2)\, g_1$$

$$g_1 = w_1\alpha_1 - (1 - \alpha_1)[w_2\alpha_2 - (1 - \alpha_2)g_1]$$

$$g_1 = w_1\alpha_1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)g_1 - (1 - \alpha_1)w_2\alpha_2$$

De forma meramente operativa, reordenando y agrupando términos, llegamos a la siguiente expresión:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2)g_1 = w_1\alpha_1 - w_2\alpha_2(1 - \alpha_1)$$

Por último despejamos g_1. En este caso será el valor correspondiente al equilibrio de Nash. Por analogía podemos hallar también g_2 en equilibrio de Nash.

$$g^N{}_1 = \frac{w_1\alpha_1 - w_2\alpha_2(1 - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2} \qquad g^N{}_2 = \frac{w_2\alpha_2 - w_1\alpha_1(1 - \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2}$$

El valor del bien público en el equilibrio de Nash será la suma de la aportación de la sociedad a su financiación en ese punto es decir, el valor de la suma de las aportaciones individuales de los diferentes consumidores.

$$G^N = g^N{}_1 + g^N{}_2 = \frac{w_1\alpha_1 - w_2\alpha_2(1 - \alpha_1) + w_2\alpha_2 - w_1\alpha_1(1 - \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2}$$

$$G^N = \frac{(w_1 + w_2)\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2}$$

ANEXO 8 - Condición de eficiencia y relación marginal de sustitución en un mercado de cinco consumidores.

El problema a desarrollar es el siguiente

$$\max\ a_1 * u_1(\sum g_i, w_1 - g_1) + a_2 * u_2(\sum g_i, w_2 - g_2) + a_3 * u_3(\sum g_i, w_3 - g_3) + a_4 * u_4(\sum g_i, w_2 - g_2) + a_5 * u_5(\sum g_i, w_5 - g_5)$$

Por tanto realizamos las derivadas parciales y las igualamos a 0:

$$\frac{\partial u_1}{\partial g_1} = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial G} + a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} * (-1) + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial G} + a_3 \frac{\partial u_3}{\partial G} + a_4 \frac{\partial u_4}{\partial G} + a_5 \frac{\partial u_5}{\partial G} = 0$$

De esta igualdad se deduce que: $\sum_{i=1}^{5} a_i = \frac{\partial u_i}{\partial G} = a_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1}$

Como esto lo hacemos también para $g_2, g_3 \ldots$ tenemos que:

$$\forall_{\mathrm{j}} \quad \frac{\sum_{i=1}^{5} a_i \frac{\partial u_i}{\partial G}}{a_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}$$

Y como para todos los consumidores el numerador es el mismo, los denominadores de todas las fracciones también coincidirán:

$$\forall_{\mathrm{i,j}} \quad a_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = a_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

Sustituyendo y simplificando:

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} a_i \frac{\partial u_i}{\partial G}}{a_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = \sum_{i=1}^{5} \frac{a_i \frac{\partial u_i}{\partial G}}{a_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = \sum_{i=1}^{5} \frac{a_i \frac{\partial u_i}{\partial G}}{a_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} 1$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{5} RMS_i = 1}$$

ANEXO 9 - Generalización algebraica de las curvas de reacción para un mercado de 5 consumidores.

En primer lugar, planteamos el problema de maximización a resolver:

$$\max U_1(x_1, G)$$

$$s.a.\ x_1 + g_1 = w_1$$

Al igual que en el equilibrio de Nash para dos consumidores, construimos la función Lagrangiana para cada consumidor y la resolvemos a través de las derivadas parciales, con las cuales generamos un sistema de ecuaciones.

$$L(x_1, g_1, \lambda) = {x_1}^{1-\alpha 1}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5)^{\alpha 1} - \lambda(x_1 + g_1 - w_1)$$

$$\frac{\partial L(.)}{\partial x_1} = (1-\alpha_1){x_1}^{-\alpha_1}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5)^{\alpha 1} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L(.)}{\partial g_1} = {x_1}^{1-\alpha_1}\alpha_1(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5)^{\alpha 1-1} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = x_1 + g_1 = w_1$$

Igualando las dos primeras derivadas obtenemos:

$$(1-\alpha_1){x_1}^{-\alpha_1}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5)^{\alpha 1} = {x_1}^{1-\alpha_1}\alpha_1(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5)^{\alpha 1-1}$$

Ahora agrupamos términos similares y reducimos las fracciones.

$$\frac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1}\frac{(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5)^{\alpha_1}}{(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5)^{\alpha_1 - 1}} = \frac{{x_1}^{1-\alpha_1}}{{x_1}^{-\alpha_1}}$$

A continuación, junto con la expresión obtenida de la tercera derivada parcial, planteamos un sistema de dos ecuaciones:

$$x_1 = \frac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5)$$

$$x_1 + g_1 = w_1$$

Después, despejamos x_1, lo sustituimos en la otra ecuación y despejamos g_1:

$$w_1 - g_1 = \frac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5)$$

$$\alpha_1 w_1 - \alpha_1 g_1 = (1-\alpha_1)(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5)$$

Simplificando obtenemos la curva de reacción del consumidor 1.

$$\boldsymbol{g_1 = \alpha_1 w_1 - (1 - \alpha_1)\,(g_2 + g_3 + g_4 + g_5)}$$

El equilibrio de Nash se obtendrá tras plantear y resolver el sistema de ecuaciones formado por cinco funciones de reacción, es decir:

$$g_1 = \alpha_1 w_1 - (1 - \alpha_1)\,(g_2 + g_3 + g_4 + g_5)$$

$$g_2 = \alpha_2 w_2 - (1 - \alpha_2)\,(g_1 + g_3 + g_4 + g_5)$$

$$g_3 = \alpha_3 w_3 - (1 - \alpha_3)(g_1 + g_2 + g_4 + g_5)$$

$$g_4 = \alpha_4 w_4 - (1 - \alpha_4)\,(g_1 + g_2 + g_3 + g_5)$$

$$g_5 = \alpha_5 w_5 - (1 - \alpha_5)\,(g_1 + g_2 + g_3 + g_4)$$